Aproximação de Stirling

Vamos mostrar que

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} \to \sqrt{2\pi} \tag{1}$$

quando $n \to \infty$.

Começamos observando que

$$n! = \int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt, \tag{2}$$

o que pode ser verificado por indução a partir do caso $n = 0$ e fazendo-se integração por partes para estabelecer o passo de indução.

A partir de (2), vamos então considerar

$$\frac{1}{n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n}} \int_0^\infty t^n\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^\infty \left(e\frac{t}{n}\right)^n e^{-t}\, dt = \sqrt{n} \int_0^\infty \left(se^{1-s}\right)^n ds, \tag{3}$$

onde a segunda igualdade se obtém pela troca de variável $s = \frac{t}{n}$.

Fazendo mais uma troca de variável, desta vez $s = 1 - \frac{x}{\sqrt{n}}$, temos que o lado direito de (3) vale

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{n}} \left[\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{x/\sqrt{n}}\right]^n dx. \tag{4}$$

A expressão dentro da integral tem o seguinte limite

$$\left[\left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{x/\sqrt{n}}\right]^n \to e^{-x^2/2} \tag{5}$$

quando $n \to \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Isto pode ser verificado tomando-se o log (na base e) nos dois lados de (5), e usando a expansão de Taylor

$$\log(1 - y) = -y - \frac{y^2}{2} + O(y^3). \tag{6}$$

Em seguida escrevemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\sqrt{n}}\left[\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{x/\sqrt{n}}\right]^n dx \\
=&\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{x}{\sqrt{n}}\right)e^{x/\sqrt{n}}\right]^n dx \\
=&\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}dx \\
=&\sqrt{2\pi},
\end{aligned} \tag{7}$$

onde usamos (5) na segunda igualdade. A terceira igualdade pode ser justificada pelo seguinte:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx = 1, \tag{8}$$

já que se trata da integral de uma função densidade de probabilidade (a da distribuição Normal padrão).

Poderíamos dizer então que (1) está provado, a não ser que a primeira igualdade em (7) precisa ser justificada. Isto pode ser feito desmembrando-se judiciosamente a integral e aplicando o mesmo tipo de argumento que leva a (5), como se esboça a seguir.

- Integral de $-n^{1/7}$ a $n^{1/7}$: (6) vale uniformemente para y numa vizinhança da origem, e daí segue que o integrando pode ser escrito como $e^{-\frac{1}{2}x^2+a_n}$, com $a_n \to 0$ quando $n\to\infty$ uniformemente no domínio de integração;

- Integral de $n^{1/7}$ a $n^{1/2}$: o integrando é dominado por $e^{-x^2/2}$;

- Integral de $-\frac{3}{4}n^{1/2}$ a $-n^{1/7}$: o integrando é dominado por $e^{-x^2/4}$;

- Integral de $-\infty$ a $-\frac{3}{4}n^{1/2}$: o integrando é dominado por $e^{\sqrt{n}x/3}$.

(Verifique/preencha os detalhes.)

Há outros métodos para provar (1); consulte a literatura/internet.