Sistemas Complexos

Luiz Renato Fontes

Processos Markovianos de salto dependentes da densidade

Para tratar do segundo regime do SIR ($m = \mu n$; $I \sim \mathrm{Exp}(1)$), vamos observar (adiante) que o par $((X_n(t), Y_n(t)))_{t\geq 0}$ que descreve a evolução temporal dos números de inds suscetíveis e infecciosos, resp, é um *processo Markoviano de salto dependente da densidade*. Começaremos então por desenvolver uma teoria geral para o comportamento assintótico deste tipo de processo qdo certo parâmetro n diverge em termos de uma *Lei dos Grandes Números* levando a soluções de certas equações diferenciais ordinárias (determinísticas).

PMSDD

O modelo

Para $n \geq 1$, seja $(Z_n(t))_{t\geq 0}$ uma cadeia de Markov em tempo contínuo em $\mathcal{K}_n$, um subconjunto finito de $\mathbb{Z}^d$ com a ppdde que existe um subconjunto compacto $\mathcal{K}$ de $\mathbb{R}^d$ tq $\frac{1}{n}\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$ $\forall$ n.

As taxas de transição de Z_n são dadas dadas por

$$q^{(n)}_{z,z+\ell} = n\beta_\ell(z/n),\ z, z+\ell \in \mathcal{K}_n,\ \ell \neq 0, \text{ onde}$$

$\beta_\ell : \mathcal{K} \to \mathbb{R}^+$, $\ell \in \mathbb{Z}^d$, é uma família de funções contínuas tq $\mathcal{L} := \{\ell \in \mathbb{Z}^d : \beta_\ell \not\equiv 0\} \not\ni 0$ é finito.

Tomaremos a condição inicial $Z_n(0)$ determinística.

Temos então as seguintes conds infinetisimais:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z_n(t+h) = z+\ell | Z_n(t) = z) = hn\beta_\ell(z/n) + o(h),\ \ell \neq 0; \\ &\mathbb{P}(Z_n(t+h) = z | Z_n(t) = z) = 1 - hn\textstyle\sum_\ell \beta_\ell(z/n) + o(h). \end{aligned} \tag{1}$$

Construção via Processos de Poisson

Sejam Y_ℓ, $\ell \in \mathbb{Z}^d$ uma família iid de processos de Poisson de taxa 1, e façamos

$$Z_n(t) = Z_n(0) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \ell \, Y_\ell\Big(n \int_0^t \beta_\ell(Z_n(s)/n)\Big) ds. \qquad (2)$$

Então Z_n é uma realização do processo descrito no slide anterior. (Verifique.)

Lei dos Grandes Números

Seja $\hat{Y}_\ell = Y_\ell(t) - t$, $t \geq 0$, $\ell \in \mathbb{Z}^d$, e façamos $\bar{Z}_n = Z_n/n$, e seja F a *fç de tendência* tq $F(x) = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \ell \beta_\ell(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Então (2) é equivalente a

$$\bar{Z}_n(t) = \bar{Z}_n(0) + \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \ell \, \frac{1}{n} \hat{Y}_\ell\Big(n \int_0^t \beta_\ell\big(\bar{Z}_n(s)\big)\Big) ds + \int_0^t F\big(\bar{Z}_n(s)\big) ds. \qquad (3)$$

Lema 1

Seja $Y = (Y(t))_{t \geq 0}$ um processo de Poisson de taxa 1, e seja $\hat{Y}(t) = Y(t) - t$. Dado $t \geq 0$, temos então qc que

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \frac{1}{n} |\hat{Y}(ns)| \to 0 \text{ qdo } n \to \infty.$$

Dem. Exercício

LGN (cont)

Segue das conds sobre β_ℓ — $\sup_{x\in\mathcal{K}} \beta_\ell(x) < \infty$, $|\mathcal{L}| < \infty$ — e do Lema 2 que o termo central à dir em (3) se anula no limite qdo $n \to \infty$ para cada $t \geq 0$.

Supondo que $\bar{Z}_n(0) \to z \in \mathcal{K}$ qdo $n \to \infty$, isto sugere que o comportamento assintótico de $\bar{Z}_n(t)$ qdo $n \to \infty$ é o mesmo daquele da slç da eq integral

$$z(t) = z + \int_0^t F(z(s))\, ds. \tag{4}$$

Vamos enunciar e provar um resultado nesta direção em seguida.

Teorema 2

Suponha que F seja Lipschitz contínua em $\mathcal{K}$ e que $\bar{Z}_n(0) \to z \in \mathcal{K}$ qdo $n \to \infty$. Então para todo $t \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq t} |\bar{Z}_n(s) - z(s)| \stackrel{qc}{=} 0,$$

onde $z(\cdot)$ é a única slç de (4).

Obs. 1) A existência e a unicidade de slç (global) de (4) nas conds do Teo 2 são estabelecidas na teoria (básica) das eqs diferenciais ordinárias.

2) Este resultado pode ser enunciado em conds mais gerais sobre o espaço de estados de Z_n e β_ℓ. Vide Andersson & Britton; Ethier & Kurtz.

Como ingrediente da prova do Teo 2, passamos a seguir a um resultado de análise.

Desigualdade de Gronwall

Suponha que f seja uma fç real tq $0 \leq f(t) \leq a + b \int_0^t f(s)\, ds$, para certas constantes positivas a, b, e todo $t \geq 0$. Então

$$f(t) \leq ae^{bt},\ t \geq 0.$$

Dem. Iterando a desigualdade do enunciado, obtemos

$$\begin{aligned}
f(t) &\leq a + b \int_0^t f(s_1)\, ds_1 \leq a + b \int_0^t \left(a + b \int_0^{s_1} f(s_2)\, ds_2\right) ds_1 \\
&= a + abt + b^2 \int_0^t \int_0^{s_1} f(s_2)\, ds_2\, ds_1 \\
&\leq a + abt + b^2 \int_0^t \int_0^{s_1} \left(a + b \int_0^{s_2} f(s_3)\, ds_3\right) ds_2\, ds_1 \\
&= a + a(bt) + a\frac{(bt)^2}{2} + b^3 \int_0^t \int_0^{s_1} \int_0^{s_2} f(s_3)\, ds_3\ ds_2\, ds_1 \\
&\leq \cdots \leq a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bt)^k}{k!} = ae^{bt}.
\end{aligned}$$

□

Dem. Teo 2

Sejam $\bar{\beta}_\ell = \max_{x\in\mathcal{K}} \beta_\ell(x)$, $\ell \in \mathcal{L}$, e M a cte de Lipschitz de F em $\mathcal{K}$.
Então para $s \le t$

$$|\bar{Z}_n(s) - z(s)| = \Big|\bar{Z}_n(0) - z + \sum_{\ell\in\mathcal{L}} \ell\, \frac{1}{n}\hat{Y}_\ell\Big(n\int_0^s \beta_\ell\big(\bar{Z}_n(u)\big)\Big)du$$

$$+ \textstyle\int_0^s \Big(F\big(\bar{Z}_n(u)\big) - F\big(z(u)\big)\Big)du\Big|$$

$$\le \Big|\bar{Z}_n(0) - z\Big| + \sum_{\ell\in\mathcal{L}} |\ell| \sup_{0\le u\le t} \frac{1}{n}\Big|\hat{Y}_\ell(n\bar{\beta}_\ell u)\Big| + M\int_0^s \Big|\bar{Z}_n(u) - z(u)\Big|du.$$

Gronwall $\Rightarrow$

$$|\bar{Z}_n(s) - z(s)| \le \left[|\bar{Z}_n(0) - z| + \textstyle\sum_{\ell\in\mathcal{L}} |\ell| \sup_{0\le u\le t} \frac{1}{n}\hat{Y}_\ell(n\bar{\beta}_\ell u)\right] e^{Ms}$$

e, logo,

$$\sup_{0\le s\le t} |\bar{Z}_n(s) - z(s)| \le \left[|\bar{Z}_n(0) - z| + \sum_{\ell\in\mathcal{L}} |\ell| \sup_{0\le u\le t} \frac{1}{n}\hat{Y}_\ell(n\bar{\beta}_\ell u)\right] e^{Mt},$$

e o resultado segue do Lema 1 e da hipótese sobre a condição inicial. $\square$

Aplicação ao SIR no segundo regime

Obs. Modificaremos a partir de agora a definição do modelo: as setas (orientadas) de infecção (efetivas ou não) entre pares (ordenados) de inds distintos da pop segundo PPs de taxa λ/n, independentes para pares distintos. Para ter a definição original nesta forma, seria necessário estipular $\lambda/(m+n-1)$ como a taxa dos PPs. Isto modificaria o resultado a ser apresentado e discutido abaixo, mas de uma forma quantitativa apenas.

$Z_n = (X_n, Y_n)$ é um PMSDD em $\mathcal{K}_n = \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, (1+\mu)n\}$ com taxas de transição

$$q^{(n)}_{(x,y),(x-1,y+1)} = \frac{\lambda}{n} xy = n\lambda\bar{x}\bar{y} \quad \text{e} \quad q^{(n)}_{(x,y),(x,y-1)} = y = n\bar{y},$$

onde $\bar{x} = \frac{x}{n}$ e $\bar{y} = \frac{y}{n}$, e logo

$$\beta_{(-1,1)}(x,y) = \lambda xy \quad \text{e} \quad \beta_{(0,-1)}(x,y) = y,$$

$(x,y) \in \mathcal{K} := [0,1] \times [0, 1+\mu] \in \mathbb{R}^2$.

Aplicação ao SIR (cont)

Temos $F(x,y) = (-\lambda xy, \lambda xy - y)$, e logo p/$(x,y),(x',y') \in \mathcal{K}$:

$|F(x,y) - F(x',y')| \leq M|(x,y) - (x',y')|$, onde $M = 2\lambda(1+\mu)+1$.

Segue do Teo 2 que

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq s\leq t} |\bar{Z}_n(s) - z(s)| \overset{qc}{=} 0,$$

onde $z(\cdot)$ é a única slç de

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\lambda x(t)y(t), & x(0) &= 1 \\ y'(t) &= \quad \lambda x(t)y(t) - y(t), & y(0) &= \mu, \end{aligned}$$

e segue que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\lambda w(t)}, \\ y(t) &= 1 + \mu - w(t) - e^{-\lambda w(t)}, \end{aligned}$$

onde $w(\cdot)$ é a única slç de $w'(t) = 1 + \mu - w(t) - e^{-\lambda w(t)}, w(0) = 0$.

Obs.

1) Sendo limite de uma fç não negativa e não crescente, $x(\cdot)$ tem tb esta ppdde; logo, $w(\cdot)$ é uma fç não negativa e não decrescente, e logo tende a um limite $\hat{w}$ qdo $t \to \infty$; logo, $x(t) \to \hat{x} := e^{-\lambda \hat{w}}$ qdo $t \to \infty$.

Agora, $\bar{w}$ tem que ser finito, pois se não $y(t)$, que é igualmente não negativa (sendo limite de fç não negativa), se torna negativa a partir de algum t.

De fato, é fácil ver que $\phi(\hat{w}) = \lim_{t\to\infty} \phi(w(t)) = 1 + \mu$, onde $\phi(x) = \phi_\lambda(x) = x + e^{-\lambda x}$, do contrário $w'(t)$ é uniforme/e positiva e $\lim_{t\to\infty} w(t) = \infty$. Concluímos que $\hat{w} = \psi_\lambda(1+\mu)$, onde $\psi_\lambda = \phi_\lambda^{-1}$ é a fç inversa de $\phi_\lambda(\cdot)$ em (τ, ∞), onde $\tau = \tau_\lambda$ é a maior raiz de $\phi(x) = 1$ em $[0, \infty)$. Logo, $\hat{x} = e^{-\lambda \psi_\lambda(1+\mu)} > 0 \ \forall \ \lambda, \mu > 0$. E tb que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Notemos que $\phi_\lambda \to \mathrm{id}$ qdo $\lambda \to \infty$ e logo $\hat{x} = \hat{x}(\lambda, \mu) \to 0$ qdo ou $\lambda \to \infty$ ou $\mu \to \infty$ (com o outro parâmetro fixo > 0).

Tb temos que $\hat{x}(\lambda, \mu) \to 1$ qdo $\lambda \to 0$, e $\hat{x}(\lambda, \mu) \to e^{-\lambda\tau} = 1 - \tau$ qdo $\mu \to 0$. E $\hat{x}(\lambda, \mu) < 1$.

Obs. (cont)

2) Finalmente, qto ao comportamento de $y(\cdot)$, note que se $\lambda \leq 1$, então y é não crescente.

Ao contrário, se $\lambda > 1$, então y inicialmente cresce até um ponto de máximo, e é decrescente em seguida.