Sistemas Complexos

Luiz Renato Fontes

Modelo SIR

Modelo de transmissão de uma infecção em que cada indivíduo de uma população de tamanho $m + n$ está em 1 de 3 estados possíveis: *suscetível, infectado*, ou *removido*. Inicialmente temos $m \geq 1$ infecciosos e $n \geq 1$ suscetíveis.

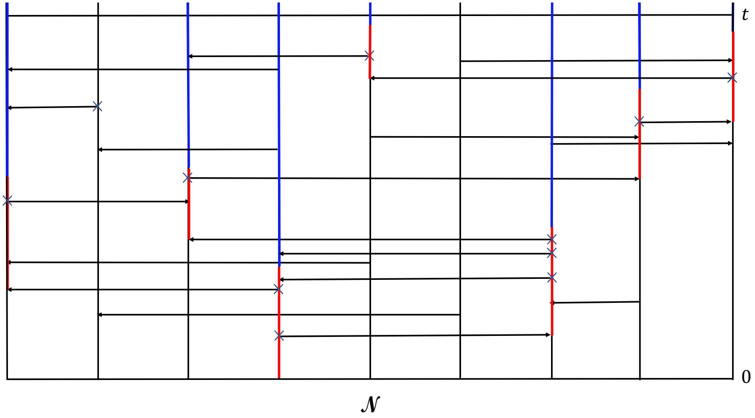
O período que cada infeccioso permanece neste estado é uma va I, após o que ele se torna removido.

Cada infeccioso a taxa λ faz contato com um outro indivíduo da população escolhido uniforme/e ao acaso; se o indivíduo contatado for suscetível, então ele se torna infeccioso. Se o indivíduo contatado estiver infectado ou removido, então nada muda, e dizemos que a infecção *se frustrou*.

Removidos/infecciosos não podem ser re/infectados.

Todas as va's do modelo são independentes.

Como os tempos de infecciosidade são todos finitos e há um número finito de indivíduos no sistema, a infecção dura um tempo finito, após o que temos apenas removidos e possivelmente suscetíveis na população.



Segmentos vermelhos correspondem a inds infecciosos e seus períodos de infecção; $\times$'s marcam início de setas em intervalos infecciosos

Comportamento assintótico

Vamos apresentar dois resultados sobre o comportamento assintótico qdo $n \to \infty$, em distintos regimes de tempo e tamanho inicial da infecção.

Primeiro vamos fixar m, e para cada T fixo, vamos obter o limite qdo $n \to \infty$ da distribuição do número de inds infectados no tempo $t \in [0, T]$, em termos de um processo de nascimento e morte associado a processo de ramificação. Neste caso a va I tem distribuição genérica.

No segundo regime $I \sim \text{Exp}(1)$, $m = \mu n$ com $\mu > 0$, e de novo obtemos o limite qdo $n \to \infty$, mas desta vez das proporções de suscetíveis e infecciosos sobre o total da pop, em termos da slç de certas eqs diferenciais; o limite vale uniforme/e em intervalos de tempo finitos arbitrários e qc.

Construção do modelo

Vamos construir o modelo SIR e simultaneamente um processo auxiliar na prova do nosso primeiro resultado (Teo 1, formulado abaixo). O processo auxiliar é semelhante ao SIR, com setas de infecção e períodos de infecção de cada ind com duração aleatórios como no SIR, com a diferença que não há infecções frustradas no modelo auxiliar.

Começamos pela população do SIR, $\mathcal{N} = \{1, \ldots, m+n\}$, de que os 1ros m inds estão infectados inicialmente, e os demais inicial/e suscetíveis. A pop do mod auxiliar é $\mathbb{N} \setminus \mathcal{N}$.

Sejam famílias de va's indep $\{Y_i^x;\, x \in \mathcal{N},\, i \geq 1\}$ e $\{I^x;\, x \in \mathbb{N}\}$, e indep entre si e indep de $\{\mathcal{P}_x,\, x \in \mathbb{N}\}$, uma família iid de processos de Poisson de taxa $\lambda > 0$ em $[0, \infty)$. Para $x \in \mathcal{N}$, $i \geq 1$, Y_i^x tem distr uniforme em $\mathcal{N} \setminus \{x\}$, e $I^x \sim I$, a va mencionada no início. Sejam $\{\sigma_1^x < \sigma_2^x < \cdots\}$ as sucessivas marcas de $\mathcal{P}_x$, e façamos $\tilde{Y}_{\sigma_i}^x = Y_i^x$, $i \geq 1$, $x \in \mathcal{N}$.

Vamos a seguir construir processos de crescimento da pop de inds infectados ou removidos no SIR e no sistema auxiliar.

Construção (cont)

Seja $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_0^* = \{1, \dots, m\}$, e, para $x \in \mathcal{G}_0$, seja $\tau_x = 0$ e $\bar{\tau}_x = I^x$.
Para $x \in \mathcal{G}_0$ fazemos

$$\eta_t(x) = \eta_t^*(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } \tau_x \le t < \bar{\tau}_x; \\ 2, & \text{se } t \ge \bar{\tau}_x. \end{cases}$$

Sejam ainda

$\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0^* = \inf\{\sigma_1^x < \bar{\tau}_x : x \in \mathcal{G}_0\}$, $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0^* = \{x \in \mathcal{G}_0 : \sigma_1^x = \mathcal{T}_0\}$,
onde $\inf \emptyset = \infty$ e $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}_0^* = \emptyset$ se $\mathcal{T}_0 = \infty$.

Para $k \ge 0$, dados $\mathcal{G}_k \subset \mathcal{N}$, $\mathcal{G}_k^* \subset \mathbb{N}$,

- Se $\mathcal{T}_k < \infty$ então $\mathcal{G}_{k+1} = \mathcal{G}_k \cup \{\tilde{Y}_{\mathcal{T}_k}^{\mathcal{X}_k}\}$; se além disto, $y_k := \tilde{Y}_{\mathcal{T}_k}^{\mathcal{X}_k} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{G}_k$, então $\tau_{y_k} = \mathcal{T}_k$ e $\bar{\tau}_{y_k} = \tau_{y_k} + I^{y_k}$, e fazemos
$$\eta_t(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < \tau_x; \\ 1, & \text{se } \tau_x \le t < \bar{\tau}_x; \\ 2, & \text{se } t \ge \bar{\tau}_x. \end{cases}$$
Fazemos ainda $\mathcal{T}_{k+1} = \inf\{\mathcal{T}_k < \sigma_i^x < \bar{\tau}_x : x \in \mathcal{G}_{k+1}, i \ge 1\}$,
$\mathcal{X}_{k+1} = \{x \in \mathcal{G}_{k+1} : \sigma_i^x = \mathcal{T}_{k+1}$ para algum $i \ge 1\}$;
- Seja $\bar{k}$ 1ro k p/o qual $\mathcal{T}_k = \infty$, neste passo o processo de crescimento termina, e fazemos $\eta_t(x) \equiv 0$, se $x \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{G}_{\bar{k}}$.

Construção (cont)

- Se $\mathcal{T}_k^* < \infty$, e
  - $\mathcal{X}_k^* \in \mathcal{N}$ e $y_k^* := \tilde{Y}_{\mathcal{T}_k^*}^{\mathcal{X}_k^*} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{G}_k^*$, então $\mathcal{G}_{k+1}^* = \mathcal{G}_k^* \cup \{y_k^*\}$;
  - $\mathcal{X}_k^* \in \mathcal{N}$ e $\tilde{Y}_{\mathcal{T}_k^*}^{\mathcal{X}_k^*} \notin \mathcal{N} \setminus \mathcal{G}_k^*$, ou $\mathcal{X}_k^* \notin \mathcal{N}$, então $\mathcal{G}_{k+1}^* = \mathcal{G}_k^* \cup \{z_k\}$, onde $z_k = \min\big\{(\mathbb{N} \setminus \mathcal{N}) \setminus \mathcal{G}_k\big\}$;

  em qquer caso, p/ $x \in \mathcal{G}_{k+1}^* \setminus \mathcal{G}_k^*$, fazemos $\tau_x^* = \mathcal{T}_k^*$, $\bar{\tau}_x^* = \tau_x^* + I^x$, e

  $$\eta_t^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le t < \tau_x^*; \\ 1, & \text{se } \tau_x^* \le t < \bar{\tau}_x^*; \\ 2, & \text{se } t \ge \bar{\tau}_x^*; \end{cases}$$

  fazemos ainda $\mathcal{T}_{k+1}^* = \inf\{\mathcal{T}_k^* < \sigma_i^x < \bar{\tau}_x^* : x \in \mathcal{G}_{k+1}^*, i \ge 1\}$, e $\mathcal{X}_{k+1}^* = \{x \in \mathcal{G}_{k+1}^* : \sigma_i^x = \mathcal{T}_{k+1}^* \text{ para algum } i \ge 1\}$;
- Seja $k^* = \inf\{k \ge 0 : \mathcal{T}_k^* = \infty\}$; se $k^* < \infty$, então o processo de crescimento é encerrado no passo k^*, e fazemos $\eta_t^*(x) \equiv 0$, se $x \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{G}_{k^*}^*$; e, neste caso, fazemos tb $\mathcal{T}_k^* = \infty$ para $k > k^*$.

Processo de nascimento e morte

Obs. 1) $\mathcal{G}_{\bar{k}} \subset \cup_{k \geq 0} \mathcal{G}_k^*$, e $\tau_x = \tau_x^* \ \forall \ x \in \mathcal{G}_{\bar{k}}$

2) $\mathcal{G}_0^*, \mathcal{G}_1^*, \ldots$ é um processo de crescimento associado a processo de ramificação $(R_\ell)_{\ell \geq 0}$ com distribuição de prole dada por $N(I)$, onde I é a variável mencionada acima, e $N(\cdot)$ é um PP(λ), indep de I, começando com m indivíduos, e em que cada eventual *filho* é adicionado por vez, seguindo certa ordem (especificada acima).

Seja $Y_t = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbb{1}\{\eta_t^*(x) = 1\}$ o número de inds infectados no processo auxiliar no tempo t; (Y_t) é um processo de nascimento e morte não necessaria/e Markoviano (depende se I é exponencial ou não).

Notemos que $Y_t \leq Z_t$, $t \geq 0$, onde Z_t é o número de inds infectados ou removidos no tempo t num processo auxiliar em que $I^x \equiv \infty$.

(Z_t) é então um processo de nascimento puro Markoviano em $\mathbb{N}$ começando em m e com taxa de nascimento em $n \in \mathbb{N}$ igual a λn. Notemos que se trata de um processo não explosivo; logo,

$$(Y_t) \text{ é não explosivo qc;} \tag{1}$$

segue que qc se $\mathcal{T}_k^* < \infty$, $k \geq 0$, então $\mathcal{T}_k^* \to \infty$ qdo $k \to \infty$. $\quad (1')$

$1^{\underline{o}}$ Regime — Teorema 1

Seja $Y_n(t) = \sum_{x\in\mathbb{N}} \mathbb{1}\{\eta_t(x) = 1\}$ o número de inds infectados no SIR no tempo t, e Y_t como acima. Então para todo $T \geq 0$ temos que com alta probabilidade (ie, com prob $\to 1$ qdo $n \to \infty$)

$$Y_n(t) = Y_t \text{ para todo } 0 \leq t \leq T.$$

Dem. Para $x \in \mathcal{G}_k^*$ para algum $k \geq 0$, seja $\mathcal{I}_x = [\tau_x^*, \bar{\tau}_x^*)$.
Dado $T > 0$, seja $K = K(T) = \inf\{k \geq 0 : \mathcal{T}_k^* \geq T\}$;
segue de $(1')$ que $K < \infty$ qc.

Seja ainda $A_n = A_n(T)$ o evento em que $\mathcal{G}_K^* \subset \mathcal{N}$.

Para completar a dem do Teo 1, basta mostrar que

$$\mathbb{P}(A_n) \to 1 \text{ qdo } n \to \infty. \tag{2}$$

Dem. de (2)

Para $\ell \geq 0$, seja

$$B_\ell = \{\mathcal{T}_\ell^* = \infty\} \cup \{\mathcal{T}_\ell^* < \infty,\, \mathcal{X}_\ell^* \in \mathcal{N},\, \tilde{Y}_{\mathcal{T}_\ell^*}^{\mathcal{X}_\ell^*} \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{G}_\ell^*\},$$

e notemos que $\cap_{\ell=0}^{K} B_\ell \subset A_n$.

Logo, dado $L \geq 0$,

$$\mathbb{P}(A_n) \geq \prod_{\ell=0}^{L} \mathbb{P}\big(B_\ell \big| \cap_{j=0}^{\ell-1} B_j\big) - \mathbb{P}(K > L),$$

onde $\cap_{j=0}^{-1} B_j = \Omega$.

Podemos verificar prontamente que a prob dentro do produto acima é $\geq 1 - \frac{m+L}{m+n-1} \to 1$ qdo $n \to \infty$, e concluímos que

$$\liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \geq 1 - \mathbb{P}(K > L) \;\forall\; L.$$

E (2) segue de L ser arbitrário. $\square$

Obs.

1) Da conexão de (Y_t) com o processo de ramificação (R_ℓ), como observado no alto do Slide 8, segue que se $\mathbb{E}(N(I)) = \lambda\iota \leq 1$, então (R_ℓ) se extingue qc, e podemos dizer que no SIR a infecção se extingue em tempo *relativamente curto* (de ordem 1) uniforme/e em n.

2) Se no entanto $\lambda\iota > 1$, então (R_ℓ) sobrevive cp > 0, e podemos dizer que para n bastante grande, no SIR a infecção sobrevive por tempo *bastante longo* (divergindo em n) cp > 0 uniforme/e em n.

Obs. 2 (cont)

De fato, podemos mostrar que neste caso, se Z_n for o tamanho final do cj de inds removidos (o tamanho final da epidemia) e (r_n) for uma seq de nos. reais tq $r_n \to \infty$, $\frac{r_n}{n} \to 0$ qdo $n \to \infty$, então

- $\mathbb{P}(Z_n \leq r_n) \to q^m$ qdo $n \to \infty$;
- $\mathbb{P}(r_n < Z_n < \alpha n\tau) \to 0$ qdo $n \to \infty$;
- $\mathbb{P}(Z_n > \beta n\tau) \to 0$ qdo $n \to \infty$,

para qquer $0 < \alpha < 1 < \beta$, onde τ é a slç não trivial de $1 - e^{-\lambda\iota\tau} = \tau$, e q é a prob de sobrevivência do processo de ramificação (R_ℓ) começando com 1 ind.

Veja na Seção 4.4 em Andersson & Britton um argumento para um resultado um pouco mais forte; o Teo 4.2 naquela seção fornece um resultado mais completo s/prova (c/ref).