

Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Processos Markovianos de saltos

Seja \mathcal{S} um cj enumerável qquer e $\mathbf{Q} = (q_{xy})_{x,y \in \mathcal{S}}$ uma Q -matriz, i.e., \mathbf{Q} satisfaz $\forall x, y \in \mathcal{S}$

- (i) $0 \leq q_x := -q_{xx} < \infty$;
- (ii) $q_{xy} \geq 0$, se $x \neq y$;
- (iii) $\sum_{z \in \mathcal{S}} q_{xz} = 0$.

Obs. $\sum_{z \in \mathcal{S}, z \neq x} q_{xz} = q_x$

Para $x, y \in \mathcal{S}$, sejam

$$\pi_{xy} = \begin{cases} \frac{q_{xy}}{q_x}, & \text{se } q_x \neq 0 \text{ e } x \neq y; \\ 0, & \text{se } q_x = 0 \text{ e } x \neq y. \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_{xx} = \begin{cases} 0, & \text{se } q_x \neq 0; \\ 1, & \text{se } q_x = 0. \end{cases}$$

Então $\mathbf{\Pi} := \{\pi_{xy}; x, y \in \mathcal{S}\}$ é uma matriz estocástica.

PMSs (cont)

Vamos a seguir construir um processo de saltos (X_t) , definindo a cadeia de saltos e depois os tempos de salto.

1) Cadeia de saltos: $(Y_n) \sim \text{CM}(\mu, \mathbf{\Pi})$, onde μ é a distr de X_0 .

2) Dada (Y_n) , T_1, T_2, \dots são va's exponenciais indep com taxas q_{Y_0}, q_{Y_1}, \dots , resp.

Construção de (X_t)

Sejam τ_0, τ_1, \dots va's iid $\text{Exp}(1)$. Dada (Y_n) , façamos

$$T_{n+1} = \tau_n / q_{Y_n}, \quad n \geq 0$$

(conv: $\tau_n/0 = \infty$). Note que $T_n > 0 \forall n \geq 1$ qc.

Há 3 casos (como já vimos antes, mais genericamente).

3 casos

1) Se $T_n < \infty \forall n \geq 1$ e $S_n = \sum_{i=1}^n T_i \rightarrow \infty$ qdo $n \rightarrow \infty$, então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n \geq 0 \text{ (} S_0 = 0 \text{),}$$

está bem definido para todo $t \geq 0$.

2) Se $T_n = \infty$ para algum $n \geq 1$, seja $n^* = \min\{n \geq 1 : T_n = \infty\}$, então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n < n^* \text{ (} S_{n^*} = \infty \text{),}$$

está bem definido para todo $t \geq 0$.

3) Se $T_n < \infty \forall n \geq 1$ e $S_n \rightarrow \zeta < \infty$ qdo $n \rightarrow \infty$, então

$$X_t = Y_n, \text{ se } S_n \leq t < S_{n+1} \text{ para algum } n \geq 0 \\ = \infty, \text{ se } t \geq \zeta, \text{ onde}$$

∞ é um pto adicionado a \mathcal{S} , está bem definido para todo $t \geq 0$.

$(X_t)_{t \geq 0}$ assim definido é dito *processo Markoviano de saltos (mínimo)* associado a \mathbf{Q} . Not: $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$.

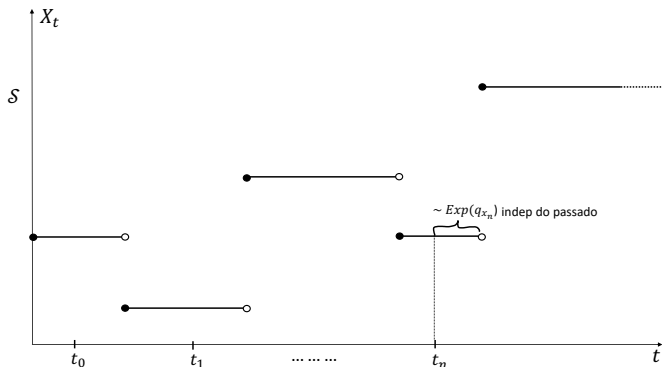
PMS — Ppdde de Markov

Teorema 1

Dados $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$ e $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = \mathbb{P}_{x_n}(X_{t_{n+1}-t_n} = x_{n+1}).$$

Dem. Segue da construção, usando a falta de memória da distr exponencial e ppdde de Markov de (Y_n) . □



Construções equivalentes

1) $\{\tau_n^y; y \in \mathcal{S}, n \geq 0\}$ iid Exp(1)

Dado que $Y_n = x$, então faça

$$T_{n+1}^y = \tau_n^y / q_{xy}, y \neq x; \quad T_{n+1} = \inf_{y \neq x} T_{n+1}^y;$$

$$Y_{n+1} = \begin{cases} y, & \text{se } T_{n+1} = T_{n+1}^y; \\ x, & \text{se } T_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

2) Sejam $(N_t^{xy}), x, y \in \mathcal{S}$, PPs indep c/txs q_{xy} , resp.

Dados Y_0 e $S_0 = 0$, façamos indutiva/e

$S_{n+1} = \inf\{t > S_n : N_t^{Y_n, Y} \neq N_{S_n}^{Y_n, Y} \text{ para algum } y \neq Y_n\}$, e

$$Y_{n+1} = \begin{cases} y, & \text{se } S_{n+1} < \infty \text{ e } N_{S_{n+1}}^{Y_n, Y} \neq N_{S_n}^{Y_n, Y}; \\ Y_n, & \text{se } S_{n+1} = \infty. \end{cases}$$

Obs. Os infs acima estão bem defs pois $\sum_{y \neq x} q_{xy} = q_x < \infty$.

Explosão

Dizemos que um PMS(\cdot, \mathbf{Q})/a Q -matriz \mathbf{Q} é *explosivo/a* se

$$\mathbb{P}_x(S_n \rightarrow \zeta < \infty \text{ qdo } n \rightarrow \infty) > 0 \text{ para algum } x \in \mathcal{S}.$$

Do contrário, dizemos que o PMS/ \mathbf{Q} é *não explosivo/a*.

Teorema 2

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\mu, \mathbf{Q})$. Então (X_t) é não explosivo se

- (i) \mathcal{S} for finito; ou
- (ii) $\sup_{x \in \mathcal{S}} q_x < \infty$; ou
- (iii) $X_0 = x$ e x for recorrente para (Y_n) .

Dem. Usamos a constr de (X_t) com tempos de salto

$$T_{n+1} = \tau_n / q_{Y_n}, \quad n \geq 0, \text{ onde } \tau_0, \tau_1, \dots \text{ va's iid Exp}(1).$$

Dem. Teo 2 (cont)

Em (i) e (ii), seja $q = \sup_{x \in \mathcal{S}} q_x$. Então

$$q\zeta = q \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \geq \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = \infty \text{ qc}$$

Em (iii), vamos supor que $q_x > 0$, do contrário temos uma situação trivial. Então, existe qc uma subsequência $0 = N_0 < N_1 < \dots$ tq $Y_{N_i} = x$, $i \geq 0$. Logo

$$q_x \zeta \geq \sum_{i=0}^{\infty} \tau_{N_i} = \infty \text{ qc.} \quad \square$$

Teorema 3

Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$, e ζ o tempo de explosão de (X_t) .

Fixado $\theta > 0$, seja $z_x = \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta})$, $x \in \mathcal{S}$. Então $z := (z_x)$ satisfaz:

- (i) $|z_x| \leq 1$, $x \in \mathcal{S}$;
- (ii) $\mathbf{Q}z = \theta z$.

Além disto, se \tilde{z} satisfizer (i-ii), então $\tilde{z}_x \leq z_x$, $x \in \mathcal{S}$.

Dem. Teo 3

(i) é óbvio;

(ii) Condicionando no 1o salto:

$$\begin{aligned}z_x &= \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) = \sum_{y \neq x} \int_0^\infty dt q_x e^{-q_x t} \pi_{xy} e^{-\theta t} \mathbb{E}_y(e^{-\theta\zeta}) \\ &= q_x \sum_{y \neq x} \pi_{xy} z_y \int_0^\infty dt e^{-(q_x + \theta)t} = \frac{q_x}{q_x + \theta} \sum_{y \neq x} \pi_{xy} z_y\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z_x(\theta - q_{xx}) = \sum_{y \neq x} q_{xy} z_y \Rightarrow \theta z_x = \sum_y q_{xy} z_y$$

□ii

O argumento acima pode ser repetido p/obtermos:

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta S_{n+1}}) = \sum_{y \neq x} \frac{q_{xy}}{q_x + \theta} \mathbb{E}_y(e^{-\theta S_n}), \quad n \geq 0$$

Dem. Teo 3 (cont)

Se \tilde{z} satisfaz (i-ii), então

$\tilde{z}_x \leq 1 = \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_0})$, $x \in \mathcal{S}$, e, supondo indutiva/e que

$\tilde{z}_x \leq \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n})$, $x \in \mathcal{S}$, então, de (ii),

$$\tilde{z}_x = \sum_{y \neq x} \frac{q_{xy}}{q_x + \theta} \tilde{z}_y \leq \sum_{y \neq x} \frac{q_{xy}}{q_x + \theta} \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n}) = \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_{n+1}}),$$

e completamos o passo de indução para concluir que

$\tilde{z}_x \leq \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n})$, $n \geq 0$, e logo

$$\tilde{z}_x \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(e^{-\theta S_n}) = \mathbb{E}_x(e^{-\theta \zeta}) = z_x, \quad x \in \mathcal{S}$$

□

Corolário

Para todo $\theta > 0$, são equivalentes

- (i) \mathbf{Q} é não explosiva;
- (ii) $\mathbf{Q}z = \theta z$ e $|z_x| \leq 1 \forall x \in \mathcal{S} \Rightarrow z \equiv 0$.

Dem. (i \Rightarrow ii)

$$(i) \Rightarrow \mathbb{P}_x(\zeta = \infty) = 1 \forall x \Rightarrow \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) = 0 \forall x. \quad (*)$$

Se $\mathbf{Q}z = \theta z$ e $|z_x| \leq 1$, então temos do Teo 3 que

$$\pm z_x \leq \mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) \stackrel{(*)}{=} 0 \Rightarrow z_x = 0.$$

(ii \Rightarrow i)

Do Teo 3, temos que $\mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta})$ satisfaz a premissa de (ii).

Segue então da conclusão de (ii) que

$$\mathbb{E}_x(e^{-\theta\zeta}) = 0, x \in \mathcal{S} \text{ e, logo, } \mathbb{P}_x(\zeta = \infty) = 1, x \in \mathcal{S}. \quad \square$$