Argumento para tempo finito no problema da ruína do apostador

Há ao menos duas abordagens para verificar que (na notação do Álbum 2), se

$$T = \inf\{n \geq 0 : \ X_n = 0 \text{ ou } N\},$$

com a convenção de que $\inf \emptyset = \infty$, então $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$.

1. Podemos definir $t_x = \mathbb{P}_x(T = \infty)$ e montar um sistema equações de diferença como para $t_0, \ldots, t_N$ como fizemos para $r_0, \ldots, r_N$. De fato, teremos a mesma recursão, a saber

   $$t_x = q\, t_{x-1} + p\, t_{x+1},\ x = 1, \ldots, N-1,$$

   a não ser que $t_0 = t_N = 0$ (lembre que $r_0 = 1$, $r_N = 0$).

   Resolvendo da mesma forma do que no Álbum 2 (ou apelando para métodos de *cálculo de diferenças finitas* para tratrar de equações desse tipo), concluímos que $t_x \equiv 0$.

2. Como mencionado em aula, podemos imaginar que o apostador, desde o início, lança uma moeda com probabilidade de cara p sucessiva e indefinidamente. Enquanto ele não vai à ruína ou atinge o objetivo, o resultado do jogo é dado pelo resultado da moeda, a saber, vitória se cara, e derrota se coroa.

   Seja τ o tempo (no experimento de lançar moedas sucessivamente como descrito acima) em que pela primeira vez se observa uma sucessão de N caras, isto é,

   $$\begin{aligned} \tau \ &= \ \inf\{n \geq N : \text{o } i\text{-ésimo lançamento da moeda resulta em cara,} \\ &\qquad i = n - N + 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

   Como $\mathbb{P}(\tau < \infty) = 1$ e $T \leq \tau$, segue que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.