Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Reversão no tempo

Propriedade de Markov: simétrica no tempo;
Convergência ao equilíbrio: assimétrica
Distr inicial de equilíbrio: restaura simetria temporal

Teorema 1. Seja $\mathbf{P}$ irredutível e com distr inv π, e $\mathbf{X} \sim \text{CM}(\pi, \mathbf{P})$.
Dado $N \geq 0$, seja $Y_n = X_{N-n}$, $n = 0, \ldots, N$.
Então $(Y_n)_{0 \leq n \leq N} \sim \text{CM}(\pi, \hat{\mathbf{P}})$, onde $\hat{\mathbf{P}} = (\hat{P}_{xy})_{x,y \in \mathcal{S}}$ é dada por

$$\pi_x P_{xy} = \pi_y \hat{P}_{yx}$$

Além disto, $\hat{\mathbf{P}}$ é irredutível e tem distr inv π.

Dem. Vamos verificar que

1) $\hat{\mathbf{P}}$ é estocástica: dado $x \in \mathcal{S}$,

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} \hat{P}_{xy} \stackrel{*}{=} \frac{1}{\pi_x} \sum_{y \in \mathcal{S}} \pi_y P_{yx} \stackrel{\text{inv}}{=} \frac{1}{\pi_x} \pi_x = 1.$$

---

*Lembre que $\pi_x > 0$ $\forall x \in \mathcal{S}$.

Dem. Teo 1 (cont)

2) π é inv para $\hat{\mathbf{P}}$: dado $x \in \mathcal{S}$,

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_x \hat{P}_{xy} = \sum_{x \in \mathcal{S}} \pi_y P_{yx} = \pi_y \overbrace{\sum_{x \in \mathcal{S}} P_{yx}}^{1} = \pi_y .$$

3) PM: Dados $x_0, \ldots, x_N \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(Y_0 = x_0, Y_1 = x_1 \ldots, Y_N = x_N) \\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_N, X_1 = x_{N-1} \ldots, X_N = x_0) \\
&= \pi_{x_N} P_{x_N x_{N-1}} \cdots P_{x_1 x_0} && (1) \\
&= \underbrace{\frac{\pi_{x_N}}{\pi_{x_{N-1}}} P_{x_N x_{N-1}}}_{\hat{P}_{x_{N-1} x_N}} \pi_{x_{N-1}} P_{x_{N-1} x_{N-2}} \cdots P_{x_1 x_0} = \ldots = \\
&= \hat{P}_{x_{N-1} x_N} \hat{P}_{x_{N-2} x_{N-1}} \cdots \hat{P}_{x_0 x_1} \pi_{x_0} , && (2)
\end{aligned}$$

e concluímos da Propo 1 (da 1^a aula) que $(Y_n)_{0 \le n \le N} \sim \mathrm{CM}(\pi, \hat{\mathbf{P}})$.

Dem. Teo 1 (cont)

4) Irredutibilidade: Da irred de $\mathbf{P}$, temos que dados $x, y \in \mathcal{S}$, existem $n \geq 0$ e $x = x_0, \ldots, x_n = y$ tq

$$P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{n-1} x_n} > 0.$$

Então $\hat{P}_{x_n x_{n-1}} \cdots \hat{P}_{x_1 x_0} \overset{(1,2)}{=} \frac{\pi_{x_n}}{\pi_{x_0}} P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{n-1} x_n} > 0.$ $\square$

Def. Dadas uma matriz estocástica $\mathbf{P}$ e uma medida μ, dizemos que μ e $\mathbf{P}$ estão *em equilíbrio detalhado*, se

$$\mu_x P_{xy} = \mu_y P_{yx}, \ \forall x, y \in \mathcal{S} \tag{3}$$

Lema 1. Se μ e $\mathbf{P}$ estiverem em equilíbrio detalhado, então μ é invariante para $\mathbf{P}$.

Dem. Somando (3) em $y \in \mathcal{S}$:

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} \mu_y P_{yx} = \sum_{y \in \mathcal{S}} \mu_x P_{xy} = \mu_x \overbrace{\sum_{y \in \mathcal{S}} P_{xy}}^{1} = \mu_x. \qquad \square$$

Reversibilidade

Def. Dada $\mathbf{X} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$, dizemos que $\mathbf{X}$ é *reversível* se para todo $N \geq 0$, $(X_{N-n})_{0 \leq n \leq N} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$.

Teorema 2. Sejam $\mathbf{P}$ uma ME irredutível e μ uma prob em $\mathcal{S}$. Suponha que $\mathbf{X} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$. Então as duas afirmações a seguir são equivalentes.

(i) $\mathbf{X}$ é reversível;

(ii) μ e $\mathbf{P}$ estão em equilíbrio detalhado.

Dem. (ii $\Rightarrow$ i) Do Lema 1, temos que μ é invariante para $\mathbf{P}$; de (3) e da def de $\hat{P}$, temos que $\hat{P} = P$. Do Teo 1, temos que $(Y_n)_{0 \leq n \leq N} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$.

(i $\Rightarrow$ ii) Da def de reversibilidade com $N = 1$:

$$\underbrace{\mathbb{P}(X_0 = x, X_1 = y)}_{\mu_x P_{xy}} = \underbrace{\mathbb{P}(X_0 = y, X_1 = x)}_{\mu_y P_{yx}} \qquad \square$$

Reversibilidade (cont)

Obs. As identidades em (3) podem ser tratadas como um sistema de equações lineares para μ, cujas soluções, se houver, são medidas invariantes para $\mathbf{P}$. Se estas medidas invariantes forem finitas, então podem ser normalizadas para fornecer uma distribuição invariante.

Exemplos. 1) $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$

$\mathbf{P}$ é irred e duplamente estocástica†, logo, $\pi = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ é a distr invariante.

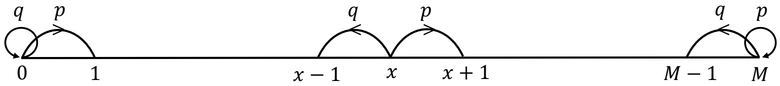
Mas π e $\mathbf{P}$ não estão em eq det e logo a cadeia não é reversível.

$^\dagger \sum_{x \in \mathcal{S}} P_{xy} = 1 \ \forall \ y \in \mathcal{S}$

Exemplos (cont)

2) PAS com reflexão na fronteira

$$p = 1 - q \in (0,1)$$



As eqs de ED são: $\mu_x \overbrace{P_{xx+1}}^{p} = \mu_{x+1} \overbrace{P_{x+1x}}^{q}$, $x = 0, \ldots, M-1$.

Equivalente/e: $\mu_{x+1} = \frac{p}{q}\mu_x$, $x = 0, \ldots, M-1$.

Uma solução: $\mu_x = \left(\frac{p}{q}\right)^x$, $x = 0, \ldots, M$.

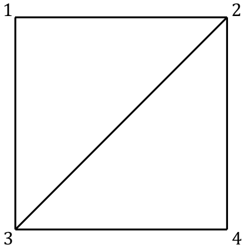
Logo, μ normalizada, π, digamos, é a distribuição invariante,
e a cadeia começando de π é reversível ($\forall p \in (0,1)$).

2′) $M = \infty$: resultado vale se $0 < p < \frac{1}{2}$.

Exemplos (cont)

3) PAS num grafo conexo

Seja $G = (\mathcal{S}, \mathcal{E})$ um grafo, em que $\mathcal{S}$ são os sítios e $\mathcal{E}$ os elos (conectando ptos de $\mathcal{S}$). Por ex:



$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathcal{E} = \{(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)\}$$

P/$x \in \mathcal{S}$, seja $V_x = \{y \in \mathcal{S} : (x, y) \in \mathcal{E}\}$ o cj de viz + próx de x, e $v_x =$ *valência* de $x = \#V_x$, o número de tais vizinhos.

Como G é suposto conexo: $v_x > 0 \ \forall x \in \mathcal{S}$. Vamos supor adicionalmente que $v_x < \infty \ \forall x \in \mathcal{S}$.

Ex 3 (cont)

CM: A partir de $x \in \mathcal{S}$, a cadeia salta para um dos vizinhos de x uniforme/e ao acaso, ie,

$$P_{xy} = \frac{1}{v_x},\ y \in V_x.$$

Então, a medida $\nu := \{v_x,\ x \in \mathcal{S}\}$ está em eq det com $\mathbf{P}$ (clara/e);

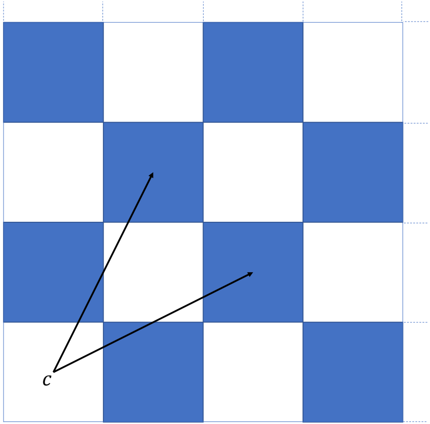
logo, *se $\mathcal{S}$ for finito*, como $\mathbf{P}$ é irred,

$\pi = \frac{1}{\sigma}\nu$, $\sigma = \sum_{x \in \mathcal{S}} v_x$, é a distr inv de $\mathbf{P}$,

e $\mathbf{X} \sim \mathrm{CM}(\pi, \mathbf{P})$ é reversível.

Exemplos (cont)

3′) *Cavalo de xadrez aleatório*



A cada salto, cavalo faz todo movimento permitido com igual prob.

Começando de um canto, qto tempo em média leva para voltar?

Ex 3′ (cont)

$v_c = 2$, e verifique que a CM é irredutível, e que no tabuleiro (completo) de xadrez há

- 4 casas com valência 2,
- 8 casas com valência 3,
- 20 casas com valência 4,
- 16 casas com valência 6 e
- 16 casas com valência 8

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \mathbb{E}_c(T_c) &= \frac{1}{\pi_c} = \frac{1}{\frac{v_c}{\sum_{x\in\mathcal{S}} v_x}} = \frac{\sum_{x\in\mathcal{S}} v_x}{v_c} \\
&= \frac{4\times 2 + 8\times 3 + 20\times 4 + 16\times 6 + 16\times 8}{2} \\
&= 168
\end{aligned}$$

Teorema Ergódico

Seja $\mathbf{X}$ uma CM em $\mathcal{S}$ com MT $\mathbf{P}$. Para $x \in \mathcal{S}$ e $n \geq 1$, seja

$V_x(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}\{X_i = x\}$ o # de visitas de $\mathbf{X}$ a x até o inst $n-1$.

Teorema 2 (Teorema Ergódico)

Suponha $\mathbf{P}$ irredutível, e tomemos μ uma prob qualquer em $\mathcal{S}$.
Seja $\mathbf{X} \sim \text{CM}(\mu, \mathbf{P})$.

a) Então, para todo $x \in \mathcal{S}$: $\dfrac{V_x(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{m_x}$ qc.

b) Se além disto, $\mathbf{P}$ for rec pos, então $\forall\ f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ limitada, temos:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{qc}} \bar{f} := \mathbb{E}_\pi\big(f(X_0)\big) = \sum_{x\in\mathcal{S}} f_x \pi_x,$$

onde π é a distr inv para $\mathbf{P}$.

Dem. Teo 2

a) Se $\mathbf{P}$ for transitória, então $V_x(\infty) = \lim_{n\to\infty} V_x(n) < \infty$ qc.

$$\therefore \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{V_x(n)}{n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{V_x(\infty)}{n} = 0 \text{ qc}$$

Se $\mathbf{P}$ for recorrente, então, dado $x \in \mathcal{S}$, seja H^x o tempo de chegada a x. Pela PFM, $(X_{H_x+n})_{n\geq 0} \sim \mathrm{CM}(\delta_x, \mathbf{P})$ [‡], e

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}\{X_i = x\} - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}\{X_{H^x+i} = x\} \right|$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=n}^{n-1+H^x} \mathbb{1}\{X_i = x\}^{\S} \leq \frac{H^x}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ qc},$$

já que $H^x < \infty$ qc.

Basta então considerar o caso em que $\mu = \delta_x$.

[‡] δ_x é a distr em $\mathcal{S}$ que atribui prob 1 a x.
[§] $\sum_{i=n}^{n-1} \cdots = 0$ por conv.

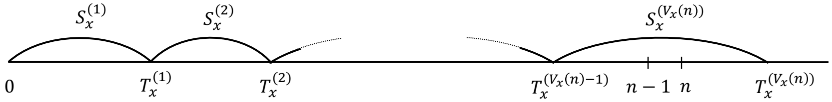
Dem. Teo 2 (cont)

Sejam $T_x^{(0)} = 0$, e p/ $r \geq 1$, $T_x^{(r)} = \inf\{n > T_x^{(r-1)} : X_n = x\}$,

e $S_x^{(r)} = T_x^{(r)} - T_x^{(r-1)}$. Pela PFM:

$S_x^{(r)}$, $r \geq 1$, é uma seq iid com $\mathbb{E}(S_x^{(1)}) = \mathbb{E}_x(T_x) = m_x$.

Note que $T_x^{(r)} = \sum_{i=1}^r S_x^{(i)}$ e $T_x^{(V_x(n)-1)} < n \leq T_x^{(V_x(n))}$.



Logo, $$\frac{V_x(n)-1}{V_x(n)} \frac{T_x^{(V_x(n)-1)}}{V_x(n)-1} \leq \frac{n}{V_x(n)} \leq \frac{T_x^{(V_x(n))}}{V_x(n)}.$$

Dem. Teo 2 (cont)

Como $V_x(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ qc (pela recorrência), temos, da Lei Forte dos Grandes Números, que o quociente do lado dir e o 2º quociente do lado esq, ambos, $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} m_x$ qc [¶], e o 1º quoc do lado esq $\underset{n\to\infty}{\overset{qc}{\longrightarrow}} 1$.

Logo, $\dfrac{n}{V_x(n)} \underset{n\to\infty}{\overset{qc}{\longrightarrow}} m_x$, e, como $m_x > 0$, $\dfrac{V_x(n)}{n} \underset{n\to\infty}{\overset{qc}{\longrightarrow}} \dfrac{1}{m_x}$. $\square_{a)}$

b) Podemos supor $max_{x\in\mathcal{S}}|f(x)| \leq 1$. Então

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) - \bar{f}\right| \leq \sum_{x\in\mathcal{S}}\left|\left(\frac{V_x(n)}{n} - \pi_x\right) f_x\right| \leq \sum_{x\in\mathcal{S}}\left|\frac{V_x(n)}{n} - \pi_x\right|$$

$$= \sum_{x\in\mathcal{U}}\left|\frac{V_x(n)}{n} - \pi_x\right| + \sum_{x\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{U}}\left|\frac{V_x(n)}{n} - \pi_x\right|, \tag{2}$$

onde $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ a ser escolhido mais abaixo.

¶ Mesmo qdo $m_x = \infty$, como ocorre no caso rec nulo.

Dem. Teo 2 (cont)

A última soma em (2) pode ser cotada superior/e por

$$\sum_{x\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{U}}\left(\frac{V_x(n)}{n}+\pi_x\right)=\sum_{x\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{U}}\left(\frac{V_x(n)}{n}-\pi_x\right)+2\sum_{x\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{U}}\pi_x$$

$$=-\sum_{x\in\mathcal{U}}\left(\frac{V_x(n)}{n}-\pi_x\right)+2\sum_{x\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{U}}\pi_x$$

$$\leq\sum_{x\in\mathcal{U}}\left|\frac{V_x(n)}{n}-\pi_x\right|+2\sum_{x\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{U}}\pi_x$$

Logo, (2) pode ser cota superior/e por

$$2\sum_{x\in\mathcal{U}}\left|\frac{V_x(n)}{n}-\pi_x\right|+2\sum_{x\in\mathcal{S}\setminus\mathcal{U}}\pi_x.$$

Dem. Teo 2 (cont)

Agora, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\mathcal{U}$ finito tq $\sum_{x \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{U}} \pi_x \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(o que é possível por π ser prob). Então

$$\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(X_i) - \bar{f} \right| \leq 2 \sum_{x \in \mathcal{U}} \left| \overbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{V_x(n)}{n} - \pi_x}^{=0,\text{ por a)}} \right| + \varepsilon}_{= \varepsilon}$$

e o resultado segue de ε ser arbitrário. $\square$