Recorrência positiva é propriedade de classe

Suponha que x seja recorrente positivo, i.e.,

$$\mathbb{E}_x(T_x) < \infty, \tag{1}$$

e $x \leftrightarrow y$. Vamos mostrar que

$$\mathbb{E}_y(T_y) < \infty. \tag{2}$$

Podemos tomar $y \neq x$.

Vamos supor que $X_0 = x$ e particionar o conjunto de tempos $\mathbb{N}$ em ciclos: para $\ell \geq 1$: $\mathcal{C}_\ell = \{T_x^{(\ell-1)}, \dots, T_x^{(\ell)} - 1\}$, onde $T_x^{(0)} = 0$ e, para $\ell \geq 1$, $T_x^{(\ell)}$ é o tempo da ℓ-ésima passagem de (X_n) por x.

Note que, por hipótese, todos os ciclos são finitos e seus respectivos comprimentos $C_\ell := T_x^{(\ell)} - T_x^{(\ell-1)}$ sãos v.a.'s iid com média finita.

Além disso, pela Propriedade Forte de Markov, eventos que dependem somente do que ocorre com o processo em ciclos diferentes são independentes.

Para $\ell \geq 1$, seja A_ℓ o evento em que (X_n) visita y durante o ℓ-ésimo ciclo, i.e.,

$$A_\ell = \{X_n = y \text{ para algum } n \in \mathcal{C}_\ell\}.$$

Então, $A_1, A_2, \dots$ são eventos independentes e identicamente distribuídos. Seja $p = P(A_1)$.

Notemos que $p > 0$, caso contrário $\mathbb{P}_x(X_n = y \text{ para algum } n \geq 0) = 0$, em contradição com $x \to y$.

Seja $L_1 = \inf\{\ell \geq 1 : A_\ell \text{ ocorre}\}$ e $L_2 = \inf\{\ell > L_1 : A_\ell \text{ ocorre}\}$, a primeira e segunda vez que acontece de (X_n) visitar y durante um ciclo. Note que L_1 e $L_2 - L_1$ são v.a.'s iid Geométricas com parâmetro p.

Vamos supor agora que $p < 1$. O caso em que $p = 1$ é mais simples. Notemos que

$$\mathbb{E}_x(T_x) = \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}|A_1)\,p + \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}|A_1^c)\,q =: \tau\,p + \tau'\,q,$$

onde $q = 1 - p$, e concluímos de (1) e $p, q > 0$ que τ, $\tau' < \infty$.

Notando que $T_y < \infty$ $\mathbb{P}_z$-quase certamente, $z = x, y$, temos agora que, de novo pela PFM, que $\mathbb{E}_y(T_y) = \mathbb{E}_x(T_y^{(2)} - T_y^{(1)})$, e que $T_y^{(2)} - T_y^{(1)} \leq T_x^{(L_2)} - T_x^{(L_1-1)} = \sum_{\ell=L_1}^{L_2} C_\ell$.

Logo,

$$\mathbb{E}_y(T_y) \leq \sum_{\ell_1, k \geq 1} \sum_{\ell=\ell_1}^{\ell_1+k} \mathbb{E}_x(C_\ell | L_1 = \ell_1,\, L_2 = \ell_1 + k)\, \mathbb{P}_x(L_1 = \ell_1,\, L_2 = \ell_1 + k). \tag{3}$$

Temos agora que $\mathbb{P}_x(L_1 = \ell_1,\, L_2 = L_1 + k) = q^{\ell_1 - 1} p\, q^{k-1} p = q^{\ell_1 + k - 2} p^2$, e notemos que

$$\mathbb{E}_x(C_\ell | L_1 = \ell_1,\, L_2 = \ell_1 + k) = \begin{cases} \tau, & \text{se } \ell = \ell_1, \ell_1 + k \\ \tau', & \text{se } \ell_1 < \ell < \ell_1 + k. \end{cases} \tag{4}$$

Substituindo em (3), concluímos que, fazendo $\bar{\tau} = \max\{\tau,\, \tau'\} < \infty$,

$$\mathbb{E}_y(T_y) \leq \bar{\tau} p^2 \sum_{\ell_1, k \geq 1} (k+1)\, q^{\ell_1 + k - 2} = \bar{\tau} p^2 \Big\{ \sum_{\ell_1 \geq 1} q^{\ell_1 - 1} \Big\} \Big\{ \sum_{k \geq 1} (k+1)\, q^{k-1} \Big\} < \infty.$$