Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Tempo de chegada e Prob de absorção

Seja $X \sim \text{CM}(\cdot, \mathbf{P})$. Dado $A \subset \mathcal{S}$, o *tempo de chegada* de $\mathbf{X}$ em A é a v.a.

$$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\} \quad (\text{conv: } \inf \emptyset = \infty)$$

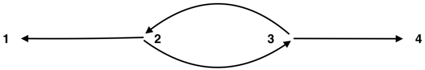
Seja $h_x^A = \mathbb{P}_x(H^A < \infty) = \mathbb{P}_x(\mathbf{X} \text{ atinge } A)$.

Qdo A for uma classe fechada, diremos que h_x^A é a *prob de absorção em* A (saindo de x).

Seja $k_x^A = \mathbb{E}_x(H^A) = \mathbb{E}_x(\text{tempo de chegada em } A)$.

Exemplo

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Seja $h_x = \mathbb{P}_x(\text{atingir } 4)$ e $k_x = \mathbb{E}_x(\text{tempo de chegada em } \{1{,}4\})$. Temos:

$$h_1 = 0,\ h_4 = 1,\ k_1 = k_4 = 0, \text{ e}$$

$$\begin{cases} h_2 = \frac{1}{2}\, h_1 + \frac{1}{2}\, h_3 \\ h_3 = \frac{1}{2}\, h_2 + \frac{1}{2}\, h_4 \end{cases}, \quad \begin{cases} k_2 = 1 + \frac{1}{2}\, k_1 + \frac{1}{2}\, k_3 \\ k_3 = 1 + \frac{1}{2}\, k_2 + \frac{1}{2}\, k_4 \end{cases}.$$

Segue que $h_2 = \frac{1}{3},\ h_3 = \frac{2}{3};\ k_2 = k_3 = 2$.

Teorema I

As probabilidades de chegada $h^A = (h_x^A) = (h_x^A,\, x \in \mathcal{S})$ são a solução *mínima* não negativa do sistema de eqs lineares

$$(*) \qquad h_x^A = \begin{cases} 1, & x \in A; \\ \sum_{y \in \mathcal{S}} P_{xy}\, h_y^A, & x \notin A. \end{cases}$$

Obs. 1) $f_x \equiv 1$ é sempre slç de $(*)$;

2) se $h_x^A < 1$ p/algum $x \in \mathcal{S}$, então $(*)$ tem mais de uma slç nneg.

3) se $h_x^A \equiv 1$ e (f_x) *limitada* for uma slç nneg de $(*)$, então $f_x \equiv h_x^A \equiv 1$.

Dem. Primeira/e, notemos que as probs de cheg satisfazem $(*)$ — basta condicionar em X_1 e observar que, por Markov,

$$\mathbb{P}_x(H^A < \infty | X_1 = y) = \mathbb{P}_y(H^A < \infty),\ x \notin A.$$

Suponha agora que (f_x) satisfaça $(*)$. Então, $f_x = h_x^A = 1$ para todo $x \in A$.

Dem. (cont)

Se $x \notin A$:

$$f_x = \sum_{y\in A} P_{xy} + \sum_{y\notin A} P_{xy} \overbrace{\sum_{z\in\mathcal{S}} P_{yz} f_z}^{f_y}$$

$$= \mathbb{P}_x(H^A = 1) + \underbrace{\sum_{y\notin A} P_{xy} \sum_{z\in A} P_{yz}}_{\mathbb{P}_x(H^A=2)} + \sum_{y,z\notin A} P_{xy} P_{yz} f_z$$

$$\vdots$$

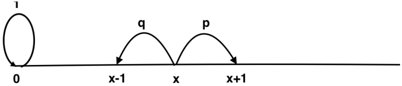
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_x(H^A = i) + \sum_{x_1,\ldots,x_n\notin A} P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \underbrace{f_{x_n}}_{\geq 0}$$

$$\geq \mathbb{P}_x(H^A \leq n),\ n \geq 1.$$

Logo, $f_x \geq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(H^A \leq n) = \mathbb{P}_x(H^A < \infty)$. $\square$

Ruína do apostador

$\mathcal{S} = \mathbb{N}$; $P_{00} = 1$; $P_{x,x+1} = p = 1 - P_{x,x-1}$, $x \geq 1$, $p \in (0,1)$.



0 é absorvente. Seja $h_x = \mathbb{P}_x(\text{ atingir } 0)$, $x \in \mathbb{N}$.

Neste caso, $(*)$ toma a seguinte forma.

$h_0 = 1$; $h_x = p\, h_{x+1} + q\, h_{x-1}$, $q = 1 - p$.

Se $p \neq q$ ($p \neq 1/2$), a eq de diferença acima tem slç geral dada por

$$h_x = A + B\lambda^x \text{ para } A, B \text{ constantes, onde } \lambda = q/p.$$

1) Se $p < 1/2$ (*jogo desfavorável*), então $\lambda^x \to \infty$ qdo $x \to \infty$. Como $h_x \in [0,1]$, temos que $B = 0$, e então $A = h_0 = 1$. Logo, $h_x \equiv 1$ neste caso.

Ruína do apostador (cont.)

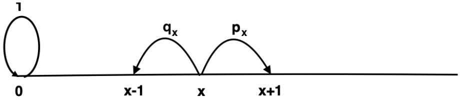
2) Se $p > 1/2$ (*jogo favorável*), então $\lambda^x \to 0$ qdo $x \to \infty$. Como $h_x \in [0,1]$, temos que $A \in [0,1]$. De $A + B = h_0 = 1$, segue que $B = 1 - A$ e $h_x = A + (1-A)\lambda^x = A(1-\lambda^x) + \lambda^x$.

Concluímos que a slç mínima corresponde a $A = 0$, e logo

$$h_x = \lambda^x = \left(\frac{q}{p}\right)^x, \ x \in \mathbb{N}.$$

3) Se $p = 1/2$ (*jogo justo*), então a slç geral de $(*)$ é $h_x = A + Bx$, e da limitação de h_x, temos novamente $B = 0$ e $A = 1$: $h_x \equiv 1$.

Obs. Veja o ex. da cadeia de nascimento e morte no livro.



Tempos de chegada esperados

Teorema II

Os tempos de chegada esperados $k^A = (k^A_x)$ são a solução *mínima* não negativa do sistema de eqs lineares

$$(**) \qquad k^A_x = \begin{cases} 0, & x \in A; \qquad (i) \\ 1 + \sum_{\substack{y \in \mathcal{S} \\ (y \notin A)}} P_{xy}\, k^A_y, & x \notin A. \qquad (ii) \end{cases}$$

Dem. Vamos primeiro verificar que k^A satisfaz $(**)$:

(i) é óbvio; se $x \notin A$, então

$$k^A_x = \mathbb{E}_x(H^A) = \sum_{y \in \mathcal{S}} \underbrace{\mathbb{E}_x(H^A | X_1 = y)}_{\text{Markov: } 1 + \mathbb{E}_y(H^A)} P_{xy} = 1 + \sum_{y \in \mathcal{S}} P_{xy} k^A_y.$$

Se g_x satisfaz $(**)$, então, para $x \in A$, $g_x = k^A_x = 0$.

Dem. (cont)

Se $x \notin A$:

$$g_x = 1 + \sum_{y \notin A} P_{xy} \Big(\overbrace{1 + \sum_{z \notin A} P_{yz} g_z}^{g_y} \Big)$$

$$= 1 + \mathbb{P}_x(H^A \geq 2) + \underbrace{\sum_{y \notin A} P_{xy} \sum_{z \notin A} P_{yz}}_{\mathbb{P}_x(H^A \geq 3)} + \sum_{y,z,w \notin A} P_{xy} P_{yz} P_{zw} g_w$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_x(H^A \geq i) + \sum_{x_1,\dots,x_n \notin A} P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \underbrace{g_{x_n}}_{\geq 0}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_x(H^A \geq i), \; n \geq 1.$$

Logo, $g_x \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_x(H^A \geq i) = \mathbb{E}_x(H^A)$. □

Ruína do apostador

$p \leq 1/2$; $k_x = \mathbb{E}_x(H^{\{0\}})$, $x \geq 0$;

$$(**) \qquad k_0 = 0,\ k_x = 1 + q\,k_{x-1} + p\,k_{x+1},\ x \geq 1.$$

Se $k_1 < \infty$, então, indutivamente a partir de $(**)$: $k_x < \infty$, $x \geq 2$.

1) Se $p = 1/2$, supondo $k_1 < \infty$, fazendo $\Delta_x = k_x - k_{x-1}$, temos de $(**)$: $\Delta_x = 2 + \Delta_{x+1}$; iterando,

$$\Delta_x = \Delta_1 - 2(x-1) = k_1 - 2(x-1),\ x \geq 1. \qquad (***)$$

Note, no entanto, que Δ_x tem que ser ≥ 0 para todo $x \geq 1$. Tomando x bastante grande, temos então uma contradição, o que nos leva à conclusão de que $k_1 = \infty$, e logo $k_x = \infty\ \forall x \geq 1$.

(Alternativa/e: de $(***)$, temos que

$$k_x = \sum_{y=1}^{x} \Delta_y = k_1 x - (x-1)x = x(k_1 - x + 1),$$

que se torna $\leq x$ para x grande, o que é absurdo, e concluímos que $k_x = \infty\ \forall x \geq 1$.)

Ruína do apostador (cont.)

2) $p < 1/2$. Supondo $k_1 < \infty$: $\Delta_{x+1} = \lambda\Delta_x - \frac{1}{p}$, $x \geq 1$ $(\star)$

Slç geral de $(\star)$: $\Delta_x = A\lambda^x + B$, $x \geq 1$; subst em $(\star)$:

$$B = \frac{1}{q-p} = \frac{1}{1-2p}$$

Como $\Delta_x \geq 0$, temos que $A \geq 0$, e logo a slç mínima positiva de $(**)$ corresponde a $A = 0$:

$$k_x = Bx = \frac{x}{1-2p}$$

Propriedade forte de Markov

Ppdde de Markov: $\forall s, t$ fixos

$$\mathbb{P}(X_{s+t} = \cdot | X_r, 0 \leq r \leq t) = \mathbb{P}(X_{s+t} = \cdot | X_t) = \mathbb{P}_{X_t}(X_s = \cdot)$$

Extensão para tempos T aleatórios:

$$\mathbb{P}(X_{s+T} = \cdot | X_r, 0 \leq r \leq T) = \mathbb{P}_{X_T}(X_s = \cdot)$$

Não pode ser válido em geral; ex.: $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$,

$T = \sup\{n \geq 0 : X_n = 1\}$ (conv: $\sup \emptyset = 0$)

... tempo da última visita a 1.

Obs. $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$

Supondo $\mu_1 = \mathbb{P}(X_0 = 1) = 1$, como $X_T = 1$ (qc):
$\mathbb{P}(X_{T+1} = 1 | X_T) = 0 \neq 1/2 = P_{11}$.

Precisamos de conds sobre T.

Tempos de parada

Dado um e.p. $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ onde haja uma seq $\mathbf{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de v.a.'s, e uma v.a. $T \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, dizemos que T é um *tempo de parada* para $\mathbf{X}$, se para cada $n \in \mathbb{N}$

o evento $\{T = n\}$ *depender apenas de* $\{X_0, \ldots, X_n\}$.

Exs. (Suponhamos que $\forall n, X_n \in \mathcal{S}$ enumerável)

1) *Tempo de* 1^a *passagem*: dado $x \in \mathcal{S}$, seja

$$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}.$$

Então $\{T_x = 1\} = \{X_1 = x\}$, e para $n \geq 2$

$$\{T_x = n\} = \{X_1 \neq x, \ldots, X_{n-1} \neq x, X_n = x\};$$

logo, T_x é um TP.

Obs. Sob $\mathbb{P}_x$, tb chamamos T_x de *tempo de retorno* a x.

Tempos de parada (exs.)

2) Dado $A \subset \mathcal{S}$,

$H^A = \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$: *tempo de chegada* em A.

Então $\{H^A = 0\} = \{X_0 \in A\}$, e para $n \geq 1$

$$\{H^A = n\} = \{X_0 \notin A, \dots, X_{n-1} \notin A, X_n \in A\};$$

logo, H^A é um TP.

3) *Tempo de última visita*: $L^A = \sup\{n \geq 0 : X_n \in A\}$

Não é em geral um TP: $\{L^A = n\}$ depende de $\{X_{n+k},\ k \geq 0\}$.

No exemplo 2 slides acima: $T = L^{\{1\}}$. (Mas considere o ex.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$$

4) Tempos determinísticos são TP's.

Teorema III (Ppdde forte de Markov)

Seja $\mathbf{X}$ uma CM e T um TP (para $\mathbf{X}$). Então $\forall x; y_1, \dots, y_n;$ $x_0, x_1, \dots \in \mathcal{S}$

$$\mathbb{P}(\overbrace{X_{T+1} = y_1, \dots, X_{T+n} = y_n}^{B} \,|\, \overbrace{T < \infty, X_0 = x_0, \dots, X_{T-1} = x_{T-1}, X_T = x}^{A})$$
$$= \mathbb{P}_x(\underbrace{X_1 = y_1, \dots, X_n = y_n}_{C}), \; n \geq 0.$$

Dem. $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B \cap A)/\mathbb{P}(A) \qquad (*)$

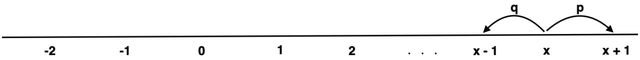
$$\mathbb{P}(B \cap A)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(\overbrace{T = \ell, X_0 = x_0, \dots, X_{\ell-1} = x_{\ell-1}}^{D}, X_\ell = x, X_{\ell+1} = y_1, \dots, X_{\ell+n} = y_n)$$
$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{\ell+1} = y_1, \dots, X_{\ell+n} = y_n | X_\ell = x, D)\, \mathbb{P}(X_\ell = x, D)$$

Dado $X_\ell = x$, D depende apenas de $\{X_0, \dots, X_{\ell-1}\}$; Markov e hom temp:

$$\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}_x(X_1 = y_1, \dots, X_n = y_n) \textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_\ell = x, D) = \mathbb{P}_x(C)\mathbb{P}(A).$$

Subst em $(*)$, segue o resultado. $\square$

Ex.: Passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$



$$q = 1 - p \in (0,1)$$

$H_x =$ tempo de chegada em $x = H^{\{x\}}$, $x \in \mathbb{Z}$.

Dado $X_0 = 2$ e $H_1 < \infty$, temos $H_0 = H_1 + \tilde{H}_0$, onde

$$\tilde{H}_0 = \inf\{n \geq 0 : X_{H_1+n} = 0\}.$$

Pela PFM, temos que, sob $\mathbb{P}_2(\cdot|H_1 < \infty)$, $\tilde{H}_0$ é ind de H_1 e tem a mesma distr que H_0 sob $\mathbb{P}_1$.

Temos ainda que H_1 sob $\mathbb{P}_2$ tem a mesma distr que H_0 sob $\mathbb{P}_1$, pela inv por translações.

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

Logo, para $0 \leq s \leq 1$, temos

$$\mathbb{E}_2(s^{H_0}) = \mathbb{E}_2(s^{H_0}, H_1 < \infty) = \mathbb{E}_2(s^{H_1+\tilde{H}_0} | H_1 < \infty)\, \mathbb{P}_2(H_1 < \infty)$$
$$= \mathbb{E}_2(s^{H_1} | H_1 < \infty)\, \mathbb{E}_2(s^{\tilde{H}_0} | H_1 < \infty)\, \mathbb{P}_2(H_1 < \infty)$$
$$= \mathbb{E}_2(s^{H_1}, H_1 < \infty)\, \mathbb{E}_1(s^{H_0}) = \mathbb{E}_1(s^{H_0})\, \mathbb{E}_1(s^{H_0}) =: \phi^2(s)$$

Por outro lado, pela PM

$$\phi(s) = p\, \mathbb{E}_2(s^{H_0+1}) + q\, \mathbb{E}_0(s^{H_0+1}) = ps\, \phi^2(s) + qs. \qquad (\star)$$

Logo, para cada $s \in [0, s)$, $\phi(s)$ satisfaz a eq $ps\, x^2 - x + qs = 0$, cujas raízes são

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}.$$

Como ϕ é contínua em $[0, 1)$ e $\phi(0) = 0$:

$$\phi(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps} \qquad (*)$$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

1) $\mathbb{P}_1(H_0 < \infty) = \lim_{s\to 1} \phi(s) \overset{(*)}{=} \dfrac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p} = \begin{cases} 1, & p \le q; \\ \frac{q}{p}, & p > q. \end{cases}$

2) Expansão de Taylor de $(*)$ em torno de 0. Para $k \ge 1$:

$$\frac{d^k}{dx^k}\overbrace{(1-\sqrt{1-x})}^{f(x)} = \frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2k-1}\,\frac{1}{2^k}\,(1-x)^{-\frac{2k-1}{2}} \overset{x=0}{=} \frac{1}{2k-1}\left\{\frac{(2k)!}{2\cdot 4\cdots 2k}\right\}\frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{1}{2k-1}\left\{\frac{(2k)!}{k!}\,\frac{1}{2^k}\right\}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2k-1}\,\frac{(2k)!}{(k!)^2}\,\frac{1}{4^k}\,k! = \underbrace{\frac{1}{2k-1}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k}}_{a_k}\,k!$$

Exp de Taylor de f em torno de 0: $f(x) = \sum_{k\ge 1} a_k x^k$.

Logo, $\phi(s) = \sum_{k\ge 1} \frac{1}{2(2k-1)}\binom{2k}{k}\frac{1}{\cancel{4^k}}\cancel{4^k} p^{k-1} q^k s^{2k-1} = \sum_{j\ge 0} p_j\, s^j$,

onde $p_j = \begin{cases} 0, & \text{se } j \text{ par}, \\ \frac{1}{2j}\binom{j+1}{\frac{j+1}{2}} p^{\frac{j-1}{2}} q^{\frac{j+1}{2}}, & \text{se } j \text{ ímpar}. \end{cases}$

PAS em $\mathbb{Z}$ (cont.)

Identificando: do acima e $\phi(s) = \sum_{j\geq 0} \mathbb{P}_1(H_0 = j)\, s^j$, segue que

$$\mathbb{P}_1(H_0 = j) = p_j,\ j \geq 0.$$

Valor esperado

$\mathbb{E}_1(H_0, H_0 < \infty) = \lim_{s\to 1} \phi'(s)$

Em vez de partir de $(*)$, vamos diferenciar $(\star)$:

$$\phi' = p\phi^2 + 2ps\phi\phi' + q \Rightarrow \phi' = \frac{p\phi^2+q}{1-2p\phi s} \xrightarrow[s\uparrow 1]{} \begin{cases} \frac{p+q}{1-2p} = \frac{1}{1-2p}, & p \leq q \\ \quad (= \infty, & p = q) \\ \frac{p\frac{q^2}{p^2}+q}{1-2p\frac{q}{p}} = \frac{q/p}{1-2q}, & p > q \end{cases}$$

Logo,

$$\mathbb{E}_1(H_0) = \frac{1}{1-2p},\text{ se } p \leq q;\text{ e } \mathbb{E}_1(H_0|H_0 < \infty) = \frac{1}{|1-2p|}.$$

Valor esperado (cont.)

Seja $k_x = \mathbb{E}_x(H_0)$, $x \geq 1$, $p \leq 1/2$.

Notemos que dado que $X_0 = x$, temos

$H_0 = \tilde{H}_{x-1} + \tilde{H}_{x-2} + \cdots + \tilde{H}_1 + \tilde{H}_0$, onde $\tilde{H}_{x-1} = H_{x-1}$ e

$$\tilde{H}_z = \inf\{n \geq 0 : X_{\tilde{H}_{x-1}+\cdots+\tilde{H}_{z+1}+n} = z\}, \ z < x-1.$$

Inv p/transl: sob $\mathbb{P}_x$, $\tilde{H}_{x-1} \sim H_0$ sob $\mathbb{P}_1$, e logo $\tilde{H}_{x-1} < \infty$ qc.

Da PFM, sob $\mathbb{P}_x$, $\tilde{H}_0, \ldots, \tilde{H}_{x-1}$ são iid $\sim H_0$ sob $\mathbb{P}_1$, e logo são todas finitas qc.

Segue prontamente que

$$k_x = \mathbb{E}_x(H_0) = x\,\mathbb{E}_1(H_0) = \frac{x}{1-2p}.$$

Recorrência e Transitoriedade

$\mathbf{X}$ cadeia de Markov em $\mathcal{S}$ c/ matriz de transição $\mathbf{P}$.

O estado $x \in \mathcal{S}$ é dito *recorrente* se $\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) = 1$, onde

$$\{X_n = x \text{ i.v.}\} = \{X_n = x \text{ infinitas vezes}\}$$
$$= \{X_n = x \text{ para infinitos } n\text{'s}\} = \cap_{i\geq 1} \cup_{j \geq i} \{X_j = x\};$$

e x é dito *transitório* se $\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) = 0$.

Seja T_x o tempo de primeira passagem por x:

$T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$, e façamos $T_x^{(0)} = 0$ e

$T_x^{(k+1)} = \inf\{n \geq T_x^{(k)} + 1 : X_n = x\}$ $(\inf \emptyset = T_x^{(k)})$, $k \geq 0$.

$T_x^{(r)}$ é o tempo da r-ésima passagem de $\mathbf{X}$ por x, $r \geq 1$.

Para $r \geq 1$, seja $S_x^{(r)} = \begin{cases} T_x^{(r)} - T_x^{(r-1)}, & \text{se } T_x^{(r-1)} < \infty, \\ 0, & \text{c. c.} \end{cases}$

Pela PFM, dado que $T_x^{(r-1)} < \infty$, $S_x^{(r)}$ indep de $S^{(1)}, \dots, S_x^{(r-1)}$ e $S_x^{(r)} \sim S^{(1)} = T_x$, $r \geq 1$.

Recorrência e Transitoriedade (cont.)

Seja V_x o número de visitas de $\mathbf{X}$ a x: $V_x = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}\{X_n = x\}$.

Obs. 1) $\{X_n = x \text{ i.v.}\} = \{V_x = \infty\}$, logo

2) x é recorrente sse $\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 1$, e

3) x é transitório sse $\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 0$.

4) $\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n\geq 0} P^{(n)}_{xx}$. (1)

Agora, se $X_0 = x$: $V_x > r \Leftrightarrow T^{(r)}_x < \infty \Leftrightarrow S^{(i)}_x < \infty,\ i \leq r$.

Fazendo $f_x = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)$:

$$\mathbb{P}_x(V_x > r) = \mathbb{P}_x(S^{(i)}_x < \infty,\ i \leq r) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}_x(S^{(i)}_x < \infty) = f^r_x \quad (2)$$

Logo, $\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(V_x > n) = \sum_{n\geq 0} f^n_x$. (3)

Teorema 1

Vale a seguinte dicotomia

(i) Se $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$, então x é recorrente e $\sum_{n\geq 0} P_{xx}^{(n)} = \infty$

(ii) Se $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$, então x é transitório e $\sum_{n\geq 0} P_{xx}^{(n)} < \infty$.

Corolário. Todo estado é ou recorrente ou transitório.

Dem. Se $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = f_x = 1$, então de (2):

$\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(V_x > n) = \lim_{n\to\infty} f_x^n = 1$ (x é rec.),

e tb $\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} P_{xx}^{(n)} = \infty$; por outro lado, se $f_x < 1$, então

$\mathbb{E}_x(V_x) = \sum_{n\geq 0} f_x^n = \frac{1}{1-f_x} < \infty \Rightarrow \mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 0$, e x é trans. $\square$

Obs. $V_x \sim \text{Geo}(1 - f_x)$ (conv: $\text{Geo}(0) = \infty$).

Teorema 2

Seja $\mathcal{C}$ uma classe de comunicação. Então, ou todos os estados de $\mathcal{C}$ são transitórios, ou são todos recorrentes.

Obs. Neste contexto, recorrência e transitoriedade são ditas *propriedades de classe*, e temos classes recorrentes e classes transitórias.

Dem. Se $x \leftrightarrow y$, então existem i, j tq $P_{xy}^{(i)}, P_{yx}^{(j)} > 0$. Logo,

$$P_{xx}^{(i+k+j)} \overset{*}{\geq} P_{xy}^{(i)} P_{yy}^{(k)} P_{yx}^{(j)} \Rightarrow P_{yy}^{(k)} \leq \frac{1}{P_{xy}^{(i)} P_{yx}^{(j)}} P_{xx}^{(i+k+j)}. \text{ Logo,}$$

$$\sum_{k\geq 0} P_{yy}^{(k)} \leq \frac{1}{P_{xy}^{(i)} P_{yx}^{(j)}} \sum_{k\geq 0} P_{xx}^{(i+k+j)} \leq \frac{1}{P_{xy}^{(i)} P_{yx}^{(j)}} \sum_{\ell\geq 0} P_{xx}^{(\ell)}.$$

Logo, se x for transitório, então y tb é transitório pelo Teo 1. $\square$

$^* P_{xy}^{(i+j)} \overset{CK}{=} \sum_{w\in\mathcal{S}} P_{xw}^{(i)} P_{wy}^{(j)} \geq P_{xw}^{(i)} P_{wy}^{(j)} \; \forall x, y, z \in \mathcal{S}, \; i, j \geq 0$

Teorema 3

Toda classe recorrente é fechada.

Dem. Suponha que $\mathcal{C}$ seja uma classe não fechada;

então $\exists\ x \in \mathcal{C},\ y \notin \mathcal{C}$ e $i > 0$ tq $\mathbb{P}_x(X_i = y) > 0$.

Como $\mathbb{P}_y(X_n = x \text{ para algum } n \geq 0) = 0$ (cc: $y \in \mathcal{C}$), segue que

$$\mathbb{P}_x(X_i = y,\ X_n = x \text{ i.v.}) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) < 1.$$

Logo x não é recorrente $\overset{Teo1}{\Longrightarrow}$ x é transitório $\overset{Teo2}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{C}$ é transitória. $\square$

Teorema 4

Toda classe fechada finita é recorrente.

Dem. Suponha que $\mathcal{C}$ seja uma classe fechada e finita.

Se $X_0 \in \mathcal{C}$, então existe $x \in \mathcal{C}$ tq

$$0 < \mathbb{P}(X_n = x \text{ i.v.}) \overset{PFM}{=} \mathbb{P}(T_x < \infty)\,\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}).$$

Logo, $\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ i.v.}) > 0$, e x não é transitório.

Logo, x e $\mathcal{C}$ são recorrentes pelos Teos 1 e 2. $\square$

Teorema A

Suponha que $\mathbf{X} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$ seja irredutível e recorrente.
Então para todo $y \in \mathcal{S}$, temos que $\mathbb{P}(T_y < \infty) = 1$.

Dem. Como $\mathbb{P}(T_y < \infty) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu_x \mathbb{P}_x(T_y < \infty)$, basta mostrar que

$$\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1 \text{ para todo } x, y \in \mathcal{S}.$$

Podemos escolher $j \geq 0$ tq $P_{yx}^{(j)} > 0$. Pelo Teo 1:

$$1 = \mathbb{P}_y(X_n = y \text{ i.v.}) = \mathbb{P}_y(X_n = y \text{ para algum } n \geq j+1)$$

$$= \sum_{z \in \mathcal{S}} \underbrace{\mathbb{P}_y(X_j = z)}_{\mathbb{P}_{yz}^{(j)}} \underbrace{\mathbb{P}_y(X_n = y \text{ para algum } n \geq j+1 | X_j = z)}_{\text{Marvov, HT: } \mathbb{P}_z(X_n = y \text{ para algum } n \geq 1) = \mathbb{P}_z(T_y < \infty)}$$

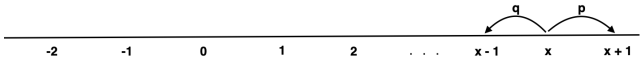
$$= \sum_{z \in \mathcal{S}} \mathbb{P}_{yz}^{(j)} \mathbb{P}_z(T_y < \infty)$$

Como $P_{yx}^{(j)} > 0$, segue da igualdade acima que $\mathbb{P}_x(T_y < \infty) = 1$.

$\square$

Recorrência e transitoriedade no passeio aleatório em $\mathbb{Z}^d$

1) $d = 1,\ q = 1 - p \in (0,1)$



Obs. Cadeia irredutível.

Seja $D_n = \#\{\text{saltos de } \mathbf{X} \text{ para a direita até o tempo } n\}$
$\sim Bin(n, p)$

Dado que $X_0 = 0$, temos $X_n = D_n - (n - D_n) = 2D_n - n$

$$\therefore X_n = k \Leftrightarrow D_n = \tfrac{n+k}{2}$$

$$\therefore P_{00}^{(n)} = \begin{cases} \binom{n}{n/2}(pq)^{n/2}, & \text{se } n = \text{ par;} \\ 0, & \text{se } n = \text{ ímpar.} \end{cases}$$

$$\therefore \textstyle\sum_{n\geq 0} P_{00}^{(n)} = \sum_{n\geq 0} P_{00}^{(2n)} = \sum_{n\geq 0} \binom{2n}{n}(pq)^n \qquad (1)$$

PAS em $\mathbb{Z}$

Se o lado direito de (1) for $< \infty$, então o PAS em Z é transitório; cc, é recorrente.

Basta avaliar o comportamento assintótico dos somandos em (1).

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{A\sqrt{2n}(2n)^{2n}e^{-2n}}{(A\sqrt{n}(n)^n e^{-n})^2} = C\,\frac{1}{\sqrt{n}}\,4^n$$

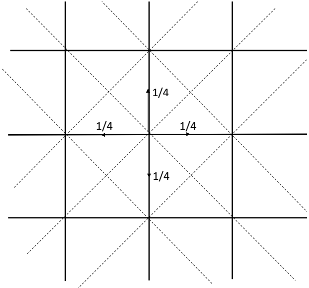
$$\therefore \tbinom{2n}{n}(pq)^n \sim C\,\tfrac{1}{\sqrt{n}}\,(4pq)^n = \begin{cases} \frac{C}{\sqrt{n}}, & \text{se } p = q; \\ \frac{C}{\sqrt{n}}\lambda^n, & \text{se } p \neq q, \end{cases}$$

onde $\lambda = 4pq \overset{p\neq q}{<} 1$.

a) $p = 1/2$: Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$, temos que $\sum_{n\geq 0} P_{00}^{(n)} = \infty$, e a cadeia é recorrente neste caso.

b) $p \neq 1/2$: Como $\sum_{n\geq 1} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n\geq 1} \lambda^n \overset{p\neq q}{<} \infty$, temos que $\sum_{n\geq 0} P_{00}^{(n)} < \infty$, e a cadeia é transitória neste caso.

PAS simétrico em $\mathbb{Z}^2$



$X_0 = \mathbf{0}$ (origem de $\mathbb{Z}^2$)

Seja $\hat{\mathbb{Z}}^2$ a rede $\mathbb{Z}^2$ rotacionada por 45^o em torno da origem, e multiplicada por $\sqrt{2}$. Então, as projeções ortogonais de $\sqrt{2}X_n$ nos eixos coord de $\hat{\mathbb{Z}}^2$, X_n^+ e X_n^-, são PAS simétricos em $\mathbb{Z}$, indeps.

$$\begin{aligned}
\therefore\ \mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)} &= \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_n = \mathbf{0}) = \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_n^+ = 0, X_n^- = 0 | X_0^+ = 0, X_0^- = 0) \\
&= \mathbb{P}_0(X_n^+ = 0 | X_0^+ = 0)\, \mathbb{P}_0(X_n^- = 0 | X_0^- = 0) \\
&= (\mathbb{P}_0^{(n)})^2 = \begin{cases} \left[\binom{n}{n/2}\frac{1}{2^n}\right]^2 \sim \frac{C'}{n}, & n \text{ par;} \\ 0, & n \text{ ímpar.} \end{cases}
\end{aligned}$$

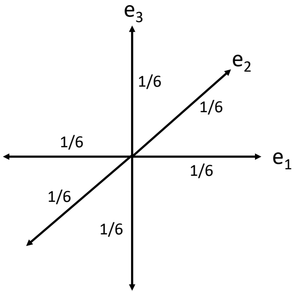
Como $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty$, temos que $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)} = \infty$, e o PASS em $d = 2$ é recorrente.

PAS simétrico em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$

$d = 3$, $X_0 = \mathbf{0}$

Seja $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$,

$e_3 = (0, 0, 1)$.



Então $X_n = \sum_{i=1}^{n} B_i \mathcal{V}_i$, onde

$$\text{indep} \begin{cases} B_1, B_2, \ldots \text{iid} \sim \text{Ber}(\{-1, +1\}; 1/2); \\ \mathcal{V}_i, \mathcal{V}_2, \ldots \text{iid}, \mathbb{P}(\mathcal{V}_1 = e_i) = 1/3, \ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

$n \geq 1$: $\mathcal{N}_n^{(i)} = \{j \leq n : \mathcal{V}_j = e_i\}$, $N_n^{(i)} = |\mathcal{N}_n^{(i)}|$; $i = 1, 2, 3$;

$$\Rightarrow (N_n^{(1)}, N_n^{(2)}, N_n^{(3)}) \sim \text{Mult}(n; \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}).$$

Dados $\mathcal{N}_n^{(1)}, \mathcal{N}_n^{(2)}, \mathcal{N}_n^{(3)}$:

$U_n^{(i)} := \sum_{j \in \mathcal{N}_n^{(i)}} B_j \sim \text{Bin}(N_n^{(i)})$, $i = 1, 2, 3$, independentes

PASS em $\mathbb{Z}^3$

Se n for ímpar, então $\mathbb{P}^{(n)}_{\mathbf{00}} = \mathbb{P}_{\mathbf{0}}(X_n = \mathbf{0}) = 0$; qdo n for par:

$$\mathbb{P}^{(n)}_{\mathbf{00}} = \frac{1}{6^n} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \text{ pares} \\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} \prod_{i=1}^{3} \binom{n_i}{n_i/2} = \frac{1}{6^n} \sum_{\substack{n_1, n_2, n_3 \text{ pares} \\ n_1+n_2+n_3=n}} \frac{n!}{(\prod_{i=1}^{3} n_i!/2)^2}$$

$$\overset{n=2k}{=} \frac{1}{6^{2k}} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{(2k)!}{(k_1! k_2! k_3!)^2} = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1\, k_2\, k_3}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{2k}$$

$$\leq \underbrace{\binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}}}_{\sim\ \text{const}/\sqrt{n}} \times \frac{1}{3^k} \max_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{k}{k_1\, k_2\, k_3}$$

No caso em que $k = 3m = k_1 + k_2 + k_3$, pode-se checar que

$$\binom{3m}{k_1\, k_2\, k_3} \overset{\dagger}{\leq} \binom{3m}{m\, m\, m} \overset{\text{Stirling}}{\sim} \frac{A\sqrt{3m}\,(3m)^{3m} e^{-3m}}{(A\sqrt{m}\, m^m\, e^{-m})^3} = \frac{\text{const}}{k}\, 3^k$$

† se $k_1 < m < k_2$: $\binom{3m}{k_1\, k_2\, k_3} < \binom{3m}{k_1+1\, k_2-1\, k_3}$

PASS em $\mathbb{Z}^3$ (cont.)

Logo,

$\mathbb{P}_{\mathbf{00}}^{(n)} \overset{(*)}{\leq} \text{const}/n^{3/2}$, se $n =$ múlt de 6; $= 0$, se $n =$ ímpar.

Mas note que $\mathbb{P}_{\mathbf{00}}^{(6m)} \geq \begin{cases} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \mathbb{P}_{\mathbf{00}}^{(6m-2)} \\ \left(\frac{1}{6}\right)^4 \mathbb{P}_{\mathbf{00}}^{(6m-4)} \end{cases} \Rightarrow (*)$ vale $\forall$ n par.

$\therefore \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_{\mathbf{0}}^{(n)} < \infty$, pois $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} < \infty$, e logo

o PASS em $d = 3$ é transitório.

Obs. Similarmente podemos argumentar que o PASS em $\mathbb{Z}^d$ é transitório em $d \geq 4$.