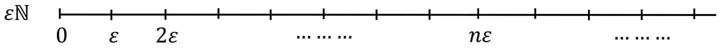
Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Cadeias de Markov em tempo contínuo

$\mathbf{P}^{(\varepsilon)}$: matriz de transição em passo $\varepsilon > 0$



$t \in \varepsilon\mathbb{N}$: $\mathbf{P}^{(t)}$ = matriz de transição em passo/no tempo t

$$= (\mathbf{P}^{(\varepsilon)})^{t/\varepsilon} = [\mathbf{I} + (\mathbf{P}^{(\varepsilon)} - \mathbf{I})]^{t/\varepsilon}$$

Vamos supor que $\mathbf{P}^{(\varepsilon)} - \mathbf{I} \approx \varepsilon \mathbf{Q}$. (1)

Então,

$$\mathbf{P}^{(t)} \approx (\mathbf{I} + \varepsilon\mathbf{Q})^{t/\varepsilon} \approx e^{t\mathbf{Q}},$$

o que poderia ser estendido para todo $t \in [0, \infty)$.

Exponenciação de matrizes

Dada uma matriz $\mathbf{A} = (A_{xy})_{x,y\in\mathcal{S}}$

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!}\, \mathbf{A}^n \quad \therefore \quad e^{t\mathbf{Q}} = \sum_{n\geq 0} \tfrac{t^n}{n!}\, \mathbf{Q}^n,$$

o que está bem definido de $|\mathcal{S}| < \infty$.

Propriedades.

1) Se $\mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_2$ comutarem, ie, se $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1$, então

$$e^{\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2} = e^{\mathbf{A}_1} e^{\mathbf{A}_2}. \tag{2}$$

2) Se $\mathbf{A}$ for diagonalizável, ie, $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$, onde $\mathbf{D} = (D_{xy})$ é diagonal com $D_{xx} = \lambda_x$, $x \in \mathcal{S}$, então

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!}\, \mathbf{A}^n = \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!}[\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}]^n = \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!}\mathbf{U}\mathbf{D}^n\mathbf{U}^{-1}$$

$$= \mathbf{U}\Big\{ \sum_{n\geq 0} \tfrac{1}{n!}\mathbf{D}^n\Big\}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{U}^{-1}, \text{ onde } \tilde{\mathbf{D}} = e^{\mathbf{D}} = (\tilde{D}_{xy}) \text{ é}$$

diagonal com $\tilde{D}_{xx} = e^{\lambda_x}$, $x \in \mathcal{S}$.

Propriedades de $\mathbf{Q}$

(Lembre de (1).)

1. Diagonal: negativa;
2. Fora da diagonal: positiva;
3. Soma sobre as linhas $= 0$.

Ou seja, escrevendo $\mathbf{Q} = (q_{xy})$, temos

1. $0 \leq -q_{xx} \overset{*}{<} \infty$;
2. $q_{xy} \geq 0$ se $x \neq y$;
3. $\sum_{y \in \mathcal{S}} q_{xy} = 0$, $x \in \mathcal{S}$.

Segue que $q_x := -q_{xx} = \sum_{y \neq x} q_{xy}$.

Definição.

Uma matriz $\mathbf{Q}$ satisfazendo (1-3) será dita uma *Q-matriz*.

*Suposição adicional.

Teorema 1

Suponha que $\mathbf{Q} = (q_{xy})_{x,y \in \mathcal{S}}$ seja uma matriz num conjunto finito $\mathcal{S}$. Fazendo $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}$, temos que $(\mathbf{P}(t),\ t \geq 0)$ satisfaz as seguintes propriedades.

(i) $\mathbf{P}(t+s) = \mathbf{P}(t)\mathbf{P}(s)\ \forall t, s$ (*ppdde de semigrupo*);

(ii) $\mathbf{P}(\cdot)$ é a única solução das *equação avançada* $\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$;

(iii) $\mathbf{P}(\cdot)$ é a única solução das *equação atrasada* $\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$;

(iv) Para $k \geq 0$: $\frac{d^k}{dt^k}\mathbf{P}(t)\Big|_{t=0} = \mathbf{Q}^k$.

Dem. (i) segue de (2) e do fato que $t\mathbf{Q}$ e $s\mathbf{Q}$ comutam.

(ii) e (iii) seguem do fato de que podemos diferenciar $\mathbf{P}(t)$ dentro do sinal de soma:

Dem. do Teo 1 (cont)

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \frac{d}{dt}\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{n!}\mathbf{Q}^n = \sum_{n\geq 1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathbf{Q}^n$$
$$= \mathbf{Q}\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{(n)!}\mathbf{Q}^n = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t)$$
$$= \Big\{\sum_{n\geq 0}\frac{t^n}{(n)!}\mathbf{Q}^n\Big\}\mathbf{Q} = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$$

e a unicidade segue do fato de que se $\mathbf{M}(t)$ satisfizer as eq avançada, então

$$(\mathbf{M}(t)e^{-t\mathbf{Q}})' = \frac{d}{dt}\mathbf{M}(t)e^{-t\mathbf{Q}} - \mathbf{M}(t)\mathbf{Q}e^{-t\mathbf{Q}}$$
$$= \Big(\frac{d}{dt}\mathbf{M}(t) - \mathbf{M}(t)\mathbf{Q}\Big)e^{-t\mathbf{Q}} = 0.$$

Logo, $\mathbf{M}(t)e^{-t\mathbf{Q}} = \text{const} = \mathbf{M}(0) = \mathbf{I}$,

e segue que $\mathbf{M}(t) = e^{t\mathbf{Q}} = \mathbf{P}(t)$. Raciocínio similar vale p/a unici// da eq atrasada.

(iv) segue da diferenciação k vezes dentro da soma. $\square$

Vamos ver a seguir o que acontece no caso de Q-matrizes.

Teorema 2

Uma matriz $\mathbf{Q}$ num conjunto finito $\mathcal{S}$ é uma Q-matriz se e somente se $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}$ for estocástica para todo $t \geq 0$.

Dem. Podemos escrever $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}} = \mathbf{I} + t\mathbf{Q} + o(t)$ (3)

Vamos começar argumentando que

$$q_{xy} \geq 0 \ \forall x \neq y \Leftrightarrow P_{xy}(t) \geq 0 \ \forall x, y \in \mathcal{S} \text{ e } t \geq 0. \tag{4}$$

($\Leftarrow$) Claro

($\Rightarrow$) Basta considerar o caso em que todas as entradas de $\mathbf{Q}$ são $\neq 0$; o caso geral segue da continuidade de $\mathbf{P}(t)$ em $\mathbf{Q}$.

De (3), $q_{xy} > 0 \ \forall x \neq y \Rightarrow P_{xy}(t) \geq 0 \ \forall x, y \in \mathcal{S}$ e $t > 0$ bastante pequeno; como $\mathbf{P}(t) = [\mathbf{P}(t/n)]^n$, temos que $P_{xy}(t) \geq 0 \ \forall x, y$ e t, e (4) está estabelecido.

Dem. Teo 2 (cont)

Se $\sum_{y\in\mathcal{S}} q_{xy} = 0$ para todo $x \in \mathcal{S}$, então, para todo $n \geq 1$

$$\sum_{z\in\mathcal{S}} Q^n_{xz} = \sum_{z\in\mathcal{S}} \sum_{w\in\mathcal{S}} Q^{n-1}_{xw} q_{wz} = \sum_{w\in\mathcal{S}} Q^{n-1}_{xw} \underbrace{\sum_{z\in\mathcal{S}} q_{wz}}_{0} = 0,$$

$$\text{e} \qquad \sum_{y\in\mathcal{S}} P_{xy}(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \overbrace{\sum_{y\in\mathcal{S}} Q^n_{xy}}^{0} = 1.$$

Por outro lado, $\sum_{y\in\mathcal{S}} q_{xy} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \overbrace{\sum_{y\in\mathcal{S}} P_{xy}(t)}^{=1\,\forall t\geq 0} = 0.$ $\square$

Cadeia de Markov em tempo contínuo (tentativo)

Se $\mathbf{P} = e^{\mathbf{Q}}$ para alguma Q-matriz $\mathbf{Q}$, então

$$(X_t^{(m)})_{t \in \frac{1}{m}\mathbb{N}} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P}^{(m)} = e^{\frac{1}{m}\mathbf{Q}})$$

(no cj de tempos $\frac{1}{m}\mathbb{N} = \left\{\frac{m}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$) tem a ppde de que

$$(X_n)_{n \in \mathbb{N}} = (X_{mt}^{(m)})_{t \in \frac{1}{m}\mathbb{N}} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$$

(no cj de tempos $\mathbb{N}$) — pois sua MT é $(\mathbf{P}^{(m)})^m = e^{\mathbf{Q}} = \mathbf{P}$).

Logo, é natural conjecturar a existência de uma CM em tempo contínuo $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ com a ppde de que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$.

Definiremos adiante uma CMTC com Q-matriz $\mathbf{Q}$ satisfazendo, para $0 \leq t_0 \leq \cdots \leq t_{n+1}$ e $x_0, \leq \ldots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \ldots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

onde $P_{xy}(t) = \left(e^{t\mathbf{Q}}\right)_{xy}$.

Exemplos

1) Seja $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Trata-se de uma Q-matriz.

Eq característica: $0 = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{Q}) = x(x+2)(x+4)$. Logo,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}; \quad e^{t\mathbf{Q}} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}$$

Logo, $P_{11}(t) = a + be^{-2t} + ce^{-4t}$.

Determinação dos coeficientes:

$P_{11}(0) = 1 = a + b + c$; $P'_{11}(0) \overset{Teo1(iv)}{=} -2 = -2b - 4c$;
$P''_{11}(0) \overset{Teo1(iv)}{=} 7 = 4b + 16c$. Resolvendo: $a = \frac{3}{8}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{3}{8}$.

$\therefore\ P_{11}(t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3}{8}e^{-4t}$, $t \geq 0$.

Exemplos (cont)

$$2)\ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ & & \cdot & \cdot & & & \\ & & & \cdot & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & & -\lambda & \lambda \\ 0 & & \cdot & \cdot & \cdot & & 0 \end{pmatrix}_{N\times N},\ Q\text{-matriz supertriangular.}$$

Logo, $\mathbf{Q}^n$ tb é supertriangular $\forall n \Rightarrow P_{xy}(t) = 0$ se $x > y$.

Eq avançada: $\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$.

$P'_{xx}(t) = -\lambda P_{xx}(t),\ P_{xx}(0) = 1,\ x = 1, \ldots, N-1 \Rightarrow P_{xx}(t) = e^{-\lambda t}$.

$P'_{xy}(t) = -\lambda P_{xy}(t) + \lambda P_{x,y-1}(t),\ P_{xy}(0) = 0,\ 1 \leq x < y < N,$

$P'_{xN}(t) = -\lambda P_{x,N-1}(t)$.

Exemplo 2 (cont)

Para $1 \leq x < y < N$: $\Big(\underbrace{e^{\lambda t} P_{xy}(t)}_{\tilde{P}_{xy}(t)}\Big)' = \lambda\, \underbrace{e^{\lambda t} P_{x,y-1}(t)}_{\tilde{P}_{x,y-1}(t)},$

i.e., $\quad \tilde{P}'_{xy}(t) = \lambda \tilde{P}_{x,y-1}(t),\ \tilde{P}_{xx}(t) \equiv 1.$

Fazendo $\hat{P}_{xy}(t) = \tilde{P}_{x,y-1}(t/\lambda)$, temos que

$\hat{P}'_{xy}(t) = -\hat{P}_{x,y-1}(t),\ \hat{P}_{xx}(t) \equiv 1 \Rightarrow \hat{P}_{xy}(t) = \frac{t^{y-x}}{(y-x)!}$

e, logo,

$P_{xy}(t) = e^{-\lambda t} \frac{t^{y-x}}{(y-x)!},\ 1 \leq x \leq y < N,\ P_{NN}(t) \equiv 1.^{*}$

(*Processo de Poisson truncado em* N)

$^{*}P_{xN}(t)$, $x < N$: por complementação.

Cadeias de Markov em tempo contínuo ($\mathcal{S}$ enumerável)

Processos de salto (não necessaria/e Markoviano): *processo passa períodos de tempo numa sucessão de estados; ao final de cada visita a dado estado, salta para o próximo estado.*

Trajetórias contínuas à direita. Distr de $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ determinada pelas distr finito dimensionais

$$\mathbb{P}(X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n),\ 0 \le t_1 < \cdots < t_n,\ x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S},\ n \ge 1.$$

Ex. Dado $x \in \mathcal{S}$,

$$\mathbb{P}(X_t = x \text{ para algum } t \ge 0) = 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{x_1,\ldots,x_n \neq x} \mathbb{P}(X_{q_1} = x_1, \ldots, X_{q_n} = x_n),$$

onde $q_1, q_2 \ldots$ é uma enumeração dos números racionais.

Processo de saltos

Seja T_i o tempo gasto na i-ésima visita do processo, $i = 1, 2, \ldots$;
$T_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$.

$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i =$ tempo do n-ésimo salto do processo, $n = 1, 2, \ldots$;
$S_0 = 0$.

$[S_{n-1}, S_n)$ ... intervalo de duração da n-ésima visita do processo, $n \geq 1$.

Seja $Y_n = X_{S_n}$, $n \geq 0$.

Então $X_t = Y_n$, se $S_n \leq t < S_{n+1}$, $n \geq 0$. $\quad (*)$

$(Y_n)_{n \geq 0}$: cadeia de saltos de (X_t).

Processo de saltos (cont)

Há 3 possíveis comportamentos:

1) $S_n < \infty$ para todo $n \geq 1$ e $S_n \to \infty$ qdo $n \to \infty$.

Então (X_t) está bem definido para todo $t \geq 0$.

2) $T_i = \infty$ para algum $i \geq 1$. Seja $n^* = \min\{i \geq 1 : \ T_i = \infty\}$.

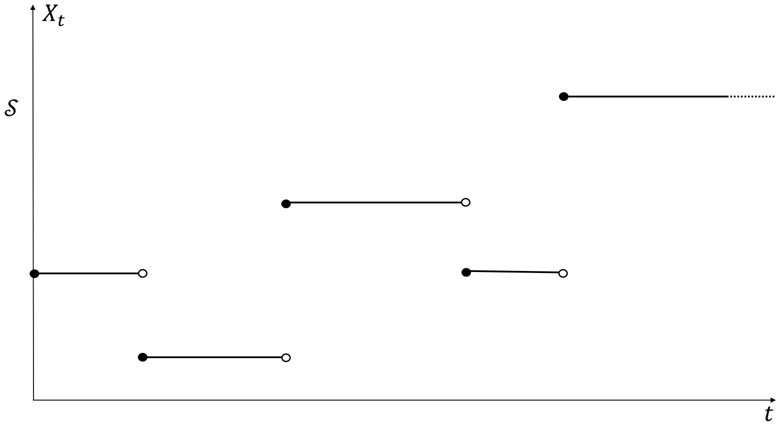
Então $S_{n^*-1} < \infty$ e $S_{n^*} = \infty$, e $(*)$ tb funciona; podemos tomar $n < n^*$.

3) $S_n \to \zeta < \infty$ qdo $n \to \infty$. Neste caso, o processo dá um número infinito de saltos em tempo finito, e $(*)$ define (X_t) para $t \in [0, \zeta)$. E depois?

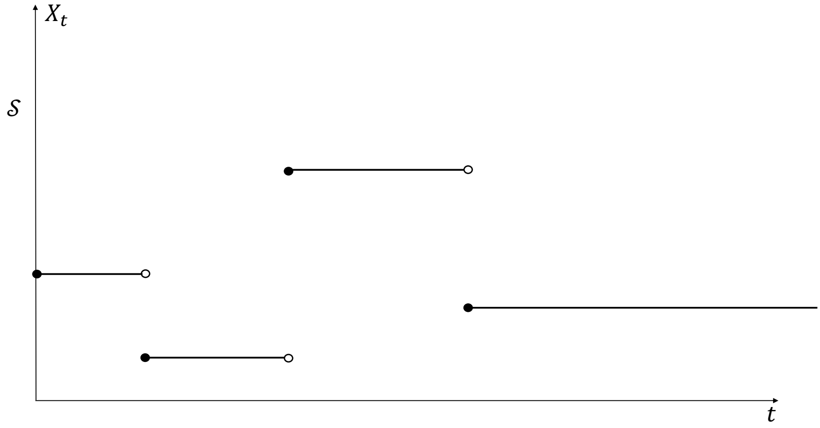
Uma saída é adicionar um ponto a $\mathcal{S}$, digamos ∞, e fazer $X_t = \infty$ para $t \geq \zeta$.

Este é o chamado *processo mínimo* (associado a (Y_n) e (T_i)).

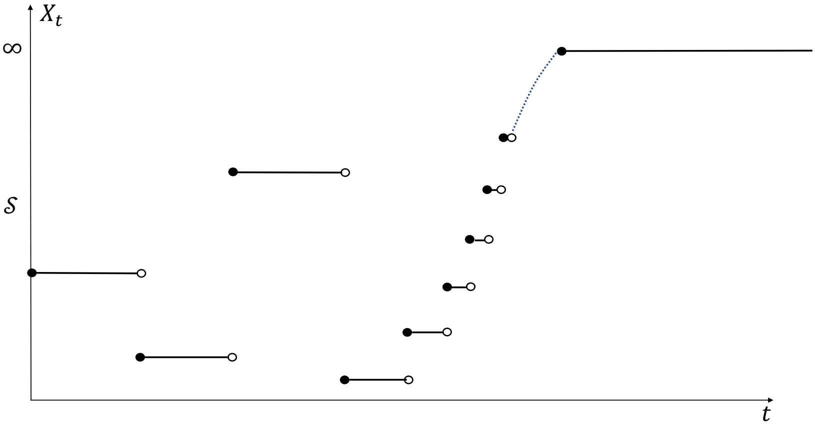
Ilustrações — Comportamento 1



Ilustrações — Comportamento 2



Ilustrações — Comportamento 3



Distribuição exponencial

(Ingrediente essencial das CMTC)

$T \sim \text{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$: $f(t) = f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, $t > 0$

$\mathbb{P}(T > t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = \int_{\lambda t}^\infty e^{-r} dr = -e^{-r}\Big|_{\lambda t}^\infty = e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$.

$(T \sim \text{Exp}(0)$: $\mathbb{P}(T = \infty) = 1)$

$\mathbb{E}(T) = \int_0^\infty \mathbb{P}(T > t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

$\mathbb{E}(e^{-T}) = \int_0^\infty e^{-t} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{1+\lambda} \int_0^\infty (1+\lambda)\, e^{-(1+\lambda)t} dt = \frac{\lambda}{1+\lambda}$

Teorema 3 (Falta de memória)

Uma v.a. não negativa apresenta *falta de memória*, i.e.,

$$\mathbb{P}(T > t + s | T > s) = \mathbb{P}(T > t) \ \forall\ s, t \geq 0, \tag{4}$$

se e somente se $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ para algum $\lambda \geq 0$.

Dem. Teo 3

$(\Leftarrow)$ l.e. (4) $= \frac{\mathbb{P}(T>t+s)}{\mathbb{P}(T>s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} =$ l.d. (3)

$(\Rightarrow)$ (4) $\Leftrightarrow \mathbb{P}(T > t+s) = \mathbb{P}(T > t)\,\mathbb{P}(T > s)\ \forall\ s, t \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > kr) &= \mathbb{P}(T > (k-1)r)\,\mathbb{P}(T > r),\ k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{R}\\ &= \mathbb{P}(T > (k-2)r)\,[\mathbb{P}(T > r)]^2 = \cdots = [\mathbb{P}(T > r)]^k \qquad (5)\end{aligned}$$

Escolhendo $k = n$ e $r = \frac{1}{n}$ em (5):

$$\mathbb{P}(T > 1) = \left[\mathbb{P}\left(T > \tfrac{1}{n}\right)\right]^n \Rightarrow \mathbb{P}\left(T > \tfrac{1}{n}\right) = \left[\mathbb{P}(T > 1)\right]^{\frac{1}{n}} \qquad (6)$$

Tomando $q = k/n$, $k, n \in \mathbb{N}$, de (5) e (6):

$$\mathbb{P}(T > q) = \left[\mathbb{P}\left(T > \tfrac{1}{n}\right)\right]^k = [\mathbb{P}(T > 1)]^{\frac{k}{n}} = [\mathbb{P}(T > 1)]^q \qquad (7)$$

dem Teo 3 (cont)

Fazendo $\lambda = -\log \mathbb{P}(T > 1)$, segue que $\mathbb{P}(T > 1) = e^{-\lambda}$, e de (7)

$$\mathbb{P}(T > q) = e^{-\lambda q},\ q \in \mathbb{Q}^+ = \text{números racionais positivos.} \tag{8}$$

Dado $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$, sejam $q_1, \dots, q_n \le t \le \tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n$, tais que

$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{q}_n = t$, e de (8)

$$e^{-\lambda \tilde{q}_n} = \mathbb{P}(T > \tilde{q}_n) \le \mathbb{P}(T > t) \le \mathbb{P}(T > q_n) = e^{-\lambda q_n}$$

Tomando limites:

$$e^{-\lambda t} = \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda \tilde{q}_n} \le \mathbb{P}(T > t) \le \lim_{n\to\infty} e^{-\lambda q_n} = e^{-\lambda t} \qquad \square$$

Teorema 4

Sejam $T_1, T_2, \ldots$ v.a.'s independentes tq $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$, e façamos $S = \sum_{i=1}^{\infty} T_i$. Temos que

$S \overset{qc}{<} \infty$ se e somente se $\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}(T_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} < \infty$.

Dem. $(\Leftarrow)$ Claro

$$
\begin{aligned}
(\Rightarrow)\ \mathbb{E}(e^{-S}) &= \mathbb{E}(e^{-\sum_{i=1}^{\infty} T_i}) = \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty} e^{-\sum_{i=1}^{n} T_i}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(e^{-\sum_{i=1}^{n} T_i}) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(e^{-T_i}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1+\lambda_i} = \left\{ \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right) \right\}^{-1} \\
&= 0, \text{ se } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} = \infty;
\end{aligned}
$$

neste caso, $e^{-S} = 0$ qc $\Rightarrow S = \infty$ qc $\square$

Teorema 5

Sejam $T_1, T_2, \ldots$ v.a.'s independentes tq $T_i \sim \text{Exp}(\lambda_i)$.

Suponha que $\lambda := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i < \infty$, e seja $T = \inf_{i \geq 1} T_i$.

Então, o inf é qc atingido em um único índice K.

Além disto, K e T são independentes, $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ e

$$\mathbb{P}(K = \ell) = \frac{\lambda_\ell}{\lambda},\ \ell \geq 1.$$

Dem. $\mathbb{P}(T > t, K = \ell) = \mathbb{P}(\overbrace{T_\ell > t,\ T_i > T_\ell,\ i \neq \ell}^{A_t^\ell})$

$$= \int_t^\infty f_{T_\ell}(s) \prod_{i \neq \ell} \mathbb{P}(T_i > s)\, ds = \frac{\lambda_\ell}{\lambda} \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} ds = e^{-\lambda t} \frac{\lambda_\ell}{\lambda}$$

Sendo $\mathbb{P}(A_0^\ell) = \frac{\lambda_\ell}{\lambda}$, temos que $\mathbb{P}(\cup_{\ell \geq 1} A_0^\ell) = \sum_{\ell \geq 1} \mathbb{P}(A_0^\ell) = 1$,

e notemos que inf é único em $\cup_{\ell \geq 1} A_0^\ell$. $\square$

Teorema 6

Sejam S, T v.a.'s independentes tq $S \sim \text{Exp}(\lambda)$ e $T \sim \text{Exp}(\mu)$.

Então,

$$\lambda \mathbb{P}(S \leq t < S + T) = \mu \mathbb{P}(T \leq t < S + T).$$

Dem. O l.d. da expressão destacada vale

$$\mu \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} e^{-\mu(t-s)} ds = \lambda\mu \int_0^t e^{-\lambda s} e^{-\mu(t-s)} ds = \lambda\mu \int_0^t e^{-\mu s} e^{-\lambda(t-s)} ds$$

e o resultado segue da simetria em λ e μ explicitada na última igualdade.

$\square$