Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Propriedades do Processo de Poisson

Teorema 1

Seja $(X_t)_{t\geq 0}$ um processo crescente, cont à dir, tq $X_0 = 0$. Seja $0 < \lambda < \infty$. São equivalentes:

a) (X_t) é um PP(λ) (i.e., $T_i \sim$ Exp (λ), $i = 1, 2 \ldots$, indep, $Y_n = n$, $n \geq 0$).

b) (X_t) tem incrementos indep e, unif/e em t:

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h), \tag{1}$$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h + o(h). \tag{2}$$

c) (X_t) tem incrementos indep e estacionários e $\forall\ t \geq 0$

$$X_t \sim \text{Poisson}(\lambda t).$$

Dem. Teo 1

(a $\Rightarrow$ c) Já vimos

(c $\Rightarrow$ b) $X_{t+h} - X_t \sim \text{Poisson}(\lambda h)$, logo

$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0) = e^{-\lambda h}$, e (1) segue;

$\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1) = \lambda h e^{-\lambda h}$, e (2) segue.

(c $\Rightarrow$ a) A cond em c) determina as distr fi-di de (X_t), e daí a distr do processo, em particular da cadeia de saltos e dos tempos de salto. Como o PP(λ) satisfaz c), então todo processo satisfazendo c) deve satisfazer a).

(b $\Rightarrow$ c) Para $x \in \mathbb{N}$, seja $p_x(t) = \mathbb{P}(X_t = x)$. Então

$$\begin{aligned} p_y(t+h) &= \textstyle\sum_{x=0}^{y} \mathbb{P}(X_{t+h} = y | X_t = x) p_x(t) \\ &= \textstyle\sum_{x=0}^{y} \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = y - x) p_x(t) \end{aligned}$$

Dem. Teo 1 (cont)

Logo,

$$
\begin{aligned}
p_y(t+h) - p_y(t) = &-(\overbrace{1 - \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)}^{\lambda h + o(h)})\, p_y(t) \\
&+ \underbrace{\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1)}_{\lambda h + o(h)}\, p_{y-1}(t) + o(h),
\end{aligned}
$$

e temos

$$
(*) \begin{cases} p_y'(t) = -\lambda p_y(t) + \lambda p_{y-1}(t), \ \ y \geq 1; \\ p_0'(t) = -\lambda p_0(t). \end{cases}
$$

Slç (vista há poucas aulas)

$$
p_y(t) = \mathbb{P}(X_t = y) = \frac{(\lambda t)^y}{y!}\, e^{-\lambda t}, \ \ y \in \mathbb{N}. \qquad \square
$$

Obs.

$(*)$ são as eqs avançadas para

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & & & \\ & -\lambda & \lambda & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & -\lambda & \lambda & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$$

Teorema 2

Suponha que (X_t) e (Y_t) sejam PPs independentes com taxas λ e μ, resp (no mesmo esp de prob). Então $(Z_t := X_t + Y_t) \sim$ PP$(\lambda + \mu)$.

Dem. 1) $\mathbb{P}(Z_{t+h} - Z_t = 0) = \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 0)$

$$= e^{-\lambda h} e^{-\mu h} = e^{-(\lambda+\mu)h} = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$$

2) $\mathbb{P}(Z_{t+h} - Z_t = 1) = \mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 1)\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 0)$

$$+\mathbb{P}(X_{t+h} - X_t = 0)\mathbb{P}(Y_{t+h} - Y_t = 1)$$

$$= [\lambda h + o(h)]\,[1 - \mu h + o(h)] + [1 - \lambda h + o(h)]\,[\mu h + o(h)]$$

$$= (\lambda + \mu)h + o(h)$$

Os incrementos de (Z_t) são somas dos incrementos de (X_t) e (Y_t); logo, são independentes. $\square$

Teorema 3

Suponha $(X_t) \sim \text{PP}(\lambda)$. Fixados $t > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, e dado que $X_t = n$, então os tempos de salto

$$(S_1, \ldots, S_n) \sim (U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}), \text{ as } \textit{estatísticas de ordem}$$

das va's iid $(U_1, \ldots, U_n)$ com distr uniforme em $(0, t)$.

Dem. Temos de $T_1, T_2, \ldots$ iid $\sim \text{Exp}(\lambda)$ que

$$f_{T_1,\ldots,T_{n+1}}(t_1, \ldots, t_{n+1}) = \lambda^{n+1} e^{-\lambda s_{n+1}} \, \mathbb{1}_{\{0<s_1<\cdots<s_{n+1}<\infty\}}, \qquad (3)$$

onde $s_k = t_1 + \cdots t_k$, $k \geq 1$.

Segue que $f_{S_1,\ldots,S_{n+1}}(s_1, \ldots, s_{n+1})$ tb é igual ao l.d. (3).

Dem. Teo 3 (cont)

Logo, dado um Boreliano A de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A, X_t = n) = \mathbb{P}((S_1, \dots, S_n) \in A, S_n < t < S_{n+1})$$

$$= \lambda^n \int_{(s_1,\dots,s_n)\in A} ds_1 \cdots ds_n \Big(\int_t^\infty ds_{n+1} \lambda e^{-\lambda s_{n+1}} \Big) \mathbb{1}_{\{0<s_1<\dots<s_n<t\}}$$

$$= \underbrace{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}_{\mathbb{P}(X_t = n)} \int_{(s_1,\dots,s_n)\in A} \underbrace{n! \, \frac{1}{t^n} \, \mathbb{1}_{\{0<s_1<\dots<s_n<t\}}}_{\text{fç densidd de prob das ests ordem de } (U_1, \dots, U_n)} ds_1 \cdots ds_n$$

$\square$

Teorema 4 (Partição de um processo de Poisson)

Seja (X_t) um processo de Poisson de taxa λ e $Y_1, Y_2, \ldots$ iid, $\mathbb{P}(Y_1 = j) = p_j$, $j \geq 1$, $\sum_{j \geq 1} p_j = 1$.

Vamos fazer $X_t^j = \sum_{r=1}^{X_t} 1\{Y_r = j\}$, $t \geq 0$, $j \geq 1$ (conv.: $\sum_{h=1}^{0} \cdots = 0$); X_t^j conta os eventos de X_t de *tipo* j.

Então, (X_t^j), $j \geq 1$, são PP's indep's de taxas λp_j, resp.

Dem. Sejam $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_\ell$ e vamos fixar $n_i^j \geq 0$, $i = 1, \ldots, \ell$; $j = 1, \ldots, k$.

Sejam $\mathbf{N}_i = (n_i^1, \ldots, n_i^k)$ e $\mathbf{X}_t = (X_t^1, \ldots, X_t^k)$.

E também $n_i = \sum_{j=1}^{k} n_i^j$, $N_m = \sum_{i=1}^{m} n_i$, $N_0 = 0$.

Vamos calcular

$$\mathbb{P}(\mathbf{X}_{t_1} = \mathbf{N}_1, \mathbf{X}_{t_2} - \mathbf{X}_{t_1} = \mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{X}_{t_\ell} - \mathbf{X}_{t_{\ell-1}} = \mathbf{N}_\ell) \tag{4}$$

$$= \mathbb{P}(X_{t_1} = n_1, X_{t_2} - X_{t_1} = n_2, \ldots, X_{t_\ell} - X_{t_{\ell-1}} = n_\ell,$$
$$\mathbf{Y}_{N_0}^{n_1} = \mathbf{N}_1, \mathbf{Y}_{N_1}^{n_2} = \mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{Y}_{N_{\ell-1}}^{n_\ell} = \mathbf{N}_\ell),$$

onde $\mathbf{Y}_m^n = \sum_{r=m+1}^{m+n}(1\{Y_r = 1\}, \ldots, 1\{Y_r = k\})$ tem distribuição Multinomial$(n; p_1, \ldots, p_k)$.

Os eventos (separados por ",") na última probabilidade são independentes e $\mathbb{P}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}} = n_i) \times \mathbb{P}(\mathbf{Y}_{N_{i-1}}^{n_i} = \mathbf{N}_i) =$

$$e^{-\lambda(t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda(t_i - t_{i-1})]^{n_i}}{n_i!} \times \frac{n_i!}{n_i^1! \cdots n_i^k!} p_1^{n_i^1} \cdots p_k^{n_i^k}$$

$$= \prod_{j=1}^k e^{-\lambda p_j (t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda p_j (t_i - t_{i-1})]^{n_i^j}}{n_i^j!}$$

Logo, a probabilidade em (4) vale

$$\prod_{j=1}^{k} \prod_{i=1}^{\ell} e^{-\lambda p_j (t_i - t_{i-1})} \frac{[\lambda p_j (t_i - t_{i-1})]^{n_i^j}}{n_i^j!}$$
$$= \prod_{j=1}^{k} P(\tilde{X}_{t_1}^j = n_1^j, \ldots, \tilde{X}_{t_\ell}^j - \tilde{X}_{t_{\ell-1}}^j = n_\ell^j), \quad (5)$$

onde $(\tilde{X}_t)$ é um PP(λp_j).

Como a probabilidade em (4) também vale

$$\mathbb{P}(\cap_{j=1}^{k} \{X_{t_1}^j = n_1^j, \ldots, X_{t_\ell}^j - X_{t_{\ell-1}}^j = n_\ell^j\}),$$

temos que, para cada $j = 1, \ldots, k$, (X_t^j) é (marginalmente) um PP(λp_j), e a fatoração no lado direito de (5) mostra que $(X_t^1), \ldots, (X_t^k)$ são independentes.