

Construção e propriedades fundamentais do processo de Poisson

Sejam T_1, T_2, \dots iid exponenciais de taxa $\lambda > 0$: intervalos de tempo entre ocorrências de certos eventos a partir de um tempo inicial $t = 0$.

T_1 é o tempo a partir do tempo inicial até a ocorrência do 1o. evento, e para $i \geq 2$, T_i é o tempo a partir de T_{i-1} até a ocorrência do i -ésimo evento.

Para $t \geq 0$, seja N_t o número de eventos ocorridos desde o tempo inicial, isto é,

$$N_t = \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}, \quad (1)$$

onde $S_0 = 0$, e para, $n \geq 1$, $S_n = \sum_{i=1}^n T_i$ é o tempo até a ocorrência do n -ésimo evento.

Observação

Note que N_t é uma função de t e T_1, T_2, \dots , indicada da seguinte forma.

$$N_t = \Phi(t; T_1, T_2, \dots), \quad (2)$$

onde Φ é a relação em (1).

O processo $(N_t)_{t \geq 0}$ é dito *processo de Poisson* de taxa λ , denotado $PP(\lambda)$.

Teorema 1

Para todo $t > 0$ fixo

$$N_t \sim \text{Poisson}(\lambda t). \quad (3)$$

Demonstração Queremos mostrar que

$$\mathbb{P}(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Vamos usar os seguintes fatos.

Fato 1 Para todo $t > 0$ e $k = 1, 2, \dots$

$$N_t < k \Leftrightarrow S_k > t, \quad e \quad (5)$$

Fato 2 Para todo $n \geq 1$

$$S_n \sim \text{Gama}(n, \lambda), \quad (6)$$

isto é, S_n é uma v.a. contínua com função de densidade de probabilidade

$$f_{S_n}(s) = \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad s > 0. \quad (7)$$

Dos Fatos 1 e 2, temos que para $t > 0$ e $k = 0, 1, 2, \dots$ fixos,

$$\mathbb{P}(N_t < k + 1) = \mathbb{P}(S_{k+1} > t) = \int_t^\infty f_{S_{k+1}}(s) ds = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!} ds. \quad (8)$$

Integrando o lado direito por partes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_t < k + 1) &= \frac{\lambda^k}{k!} \left[(-e^{-\lambda s} s^k) \Big|_t^\infty + k \int_t^\infty e^{-\lambda s} s^{k-1} ds \right] \\ &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda t} t^k + \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_t^\infty e^{-\lambda s} s^{k-1} ds \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} + \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!} ds \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \mathbb{P}(N_t < k). \end{aligned} \quad (9)$$

Iterando (9), obtemos

$$\mathbb{P}(N_t < k + 1) = \sum_{i=0}^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \quad (10)$$

e, logo,

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \mathbb{P}(N_t < k + 1) - \mathbb{P}(N_t < k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad \square$$

Teorema 2

Sejam $k \geq 2$ e $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$. Então

$$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}} \text{ são v.a.'s independentes} \quad (11)$$

tais que

$$N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \sim N_{t_i - t_{i-1}}, \quad i=2, \dots, k. \quad (12)$$

Observação

Este resultado diz que os incrementos de (N_t) são independentes e estacionários.

O Teorema 2 é uma consequência do seguinte resultado.

Lema

Para todo $t > 0$ fixo, sejam

$$T_1^{(t)} = S_{N_t+1} - t; \text{ e para } i \geq 2 \quad (13)$$

$$T_i^{(t)} = T_{N_t+i}. \quad (14)$$

Então

$$N_t, T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots \text{ são v.a.'s independentes e} \quad (15)$$

$$(T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots) \sim (T_1, T_2, \dots) \quad (16)$$

Observação

$T_1^{(t)}$ é tempo transcorrido desde t até a ocorrência do próximo evento, e $T_i^{(t)}$, $i \geq 2$, é o tempo transcorrido desde $T_{i-1}^{(t)}$ até a ocorrência do próximo evento.

Demonstração do Teorema 2 Note que para $t \geq 0$

$$N_{s+t} - N_t = \Phi(s; T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, \dots) =: N_s^{(t)}. \quad (17)$$

(15) $\Rightarrow N_t$ e $(N_{s+t} - N_t)_{s \geq 0}$ independentes.

Tomando $t = t_1$ no Lema, como $(N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}})$ é uma função de $(N_{s+t_1} - N_{t_1})_{s \geq 0}$:

N_{t_1} e $(N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}})$ são independentes. (18)

$$(16) \Rightarrow (N_{s+t_1} - N_{t_1})_{s \geq 0} = (N_s^{(t_1)})_{s \geq 0} \sim (N_s)_{s \geq 0}. \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \text{Segue que } & (N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}) \\ & \sim (N_{t_2-t_1}, N_{t_3-t_1} - N_{t_2-t_1}, \dots, N_{t_k-t_1} - N_{t_{k-1}-t_1}). \end{aligned} \quad (20)$$

$k = 2$: (18,20) \Rightarrow (11,12).

Caso geral: iteração do argumento acima, aplicado ao l.d. de (20), que tem a mesma forma que (11).

Demonstração do Lema Basta mostrar que para todo $k, \ell \geq 0$ e $t_1, \dots, t_\ell > 0$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N_t = k, T_1^{(t)} > t_1, \dots, T_\ell^{(t)} > t_\ell) \\ &= \mathbb{P}(N_t = k) \mathbb{P}(T_1 > t_1, \dots, T_\ell > t_\ell). \end{aligned} \quad (21)$$

Note que

$$N_t = k \Leftrightarrow S_k \leq t, S_{k+1} > t, \quad (22)$$

do que segue que o lado esquerdo de (21) vale

$$\mathbb{P}(S_k \leq t, S_{k+1} > t, S_{k+1} - t > t_1, T_{k+2} > t_2, \dots, T_{k+\ell} > t_\ell). \quad (23)$$

Obs: (22) $\Rightarrow T_1^{(t)} = S_{k+1} - t; T_i^{(t)} = T_{k+i}, i = 2, \dots, \ell.$

$$\begin{aligned}
(23) &= \int_0^t ds f_{S_k}(s) \mathbb{P}(T_{k+1} > t_1 + t - s, T_{k+2} > t_2, \dots, T_{k+l} > t_l) \\
&= \int_0^t ds f_{S_k}(s) \mathbb{P}(T_1 > t_1 + t - s) \mathbb{P}(T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \\
&= \int_0^t ds f_{S_k}(s) \mathbb{P}(T_1 > t - s) \mathbb{P}(T_1 > t_1) \mathbb{P}(T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \\
&= \int_0^t ds f_{S_k}(s) \mathbb{P}(T_{k+1} > t - s) \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \\
&= \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \int_0^t ds f_{S_k}(s) \mathbb{P}(T_{k+1} > t - s) \\
&= \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \mathbb{P}(S_k \leq t, S_k + T_{k+1} > t) \\
&= \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \mathbb{P}(S_k \leq t, S_{k+1} > t) \\
&= \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2, \dots, T_\ell > t_\ell) \mathbb{P}(N_t = k) \quad \square
\end{aligned}$$

Corolário. $(N_t)_{t \geq 0}$ é Markoviano.

Prova. Dados $0 < t_1 < \dots < t_n < t < t'$, $i_1 \leq \dots \leq i_n \leq i \leq j$,

$$\begin{aligned} & P(N_{t'} = j | N_t = i, N_{t_1} = i_1, \dots, N_{t_n} = i_n) \\ &= P(N_{t'} - N_t = j - i | N_t = i, N_{t_1} = i_1, \dots, N_{t_n} = i_n) \\ &= P(N_{t'} - N_t = j - i) = P(N_{t'-t} = j - i), \end{aligned} \tag{24}$$

onde a segunda igualdade segue da independência entre

$$N_{t'} - N_t \text{ e } (N_t, N_{t_1}, \dots, N_{t_n})$$

estabelecida pelo Teorema 2 (pois $(N_t, N_{t_1}, \dots, N_{t_n})$ é uma função de $(N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}, N_t - N_{t_n})$).

(24) então estabelece a propriedade de Markov: dado o presente (N_t) , o futuro $(N_{t'})$ não depende do passado $(N_{t_1}, \dots, N_{t_n})$ — note que o lado esquerdo de (24) é uma função de i, j, t, t' apenas, não depende de $i_1, t_1, \dots, i_n, t_n$.