

# Sistemas Complexos

Luiz Renato Fontes

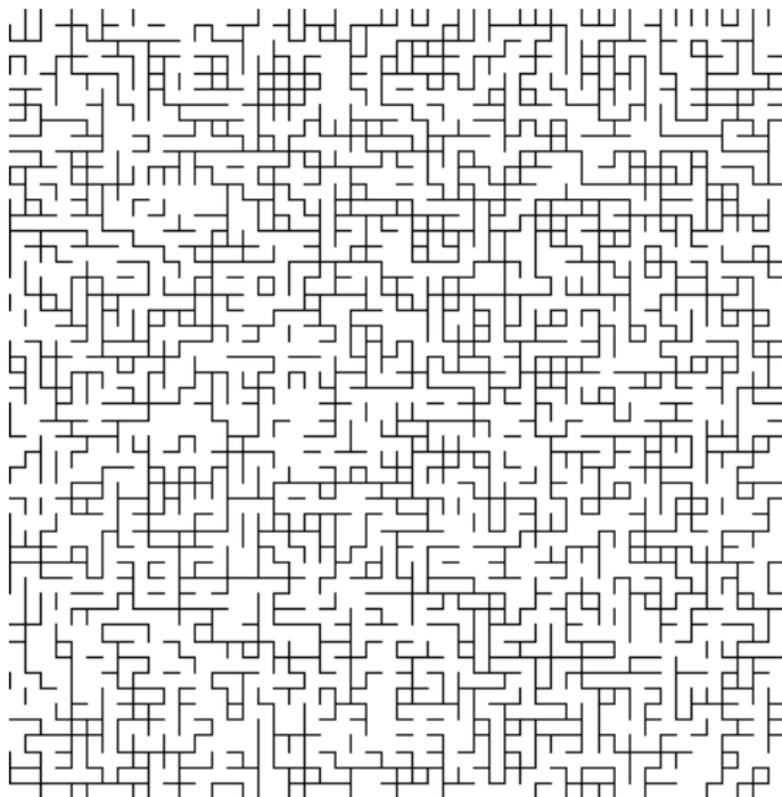
## Percolação em $\mathbb{Z}^d$ (Broadbent e Hammersley)

Para  $d \geq 1$ , seja  $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}^d)$  o grafo cujos sítios são os elementos de  $\mathbb{Z}^d$  e os elos são dados pelos pares de vizinhos mais próximos de  $\mathbb{Z}^d$ :  $\mathcal{E}^d = \{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ e } \|x - y\|_1 = 1\}$  ( $\langle x, y \rangle$  e  $\langle y, x \rangle$  representam o mesmo elo).

O *modelo de percolação de elos independentes* é o grafo aleatório  $\mathcal{L}^d(p) = (\mathbb{Z}^d, \mathcal{E}^d(p))$ , onde  $\mathcal{E}^d(p) = \{e \in \mathcal{E}^d : \omega_e = 1\}$ , e  $\mathcal{B} = \{\omega_e; e \in \mathcal{E}^d\}$  são va's iid com distr de Bernoulli( $p$ )

Se  $\omega_e = 1$ :  $e$  está *aberto* ou *presente*;  
do contrário, *fechado* ou *ausente*.

## Simulação em $d = 2$



## Conectividade

Um *caminho* (autoevitante) é qualquer seqüência de  $\ell + 1$  sítios  $\gamma = (x_0, \dots, x_\ell)$  de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\ell \geq 0$ , todos distintos e tal que, se  $\ell \geq 1$ , então  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \in \mathcal{E}^d$ ,  $i = 1, \dots, \ell$ ; neste caso, dizemos que  $\gamma$  *liga*  $x_0$  a  $x_\ell$ , ou que  $x_0$  e  $x_\ell$  são *extremidades de  $\gamma$* , e que  $|\gamma| = \ell$  é o comprimento de  $\gamma$ . Se  $x$  for uma das extremidades de  $\gamma$ , diremos que  $x$  *começa* em  $\gamma$ .

A noção de conectividade no modelo de percolação é a natural (e usual): dois sítios  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{Z}^d$  estão conectados se  $x = y$  ou se  $x \neq y$  e houver um caminho (de elos) aberto(s) ligando  $x$  a  $y$ ; em outras palavras, se houver um caminho  $\gamma$  ligando  $x$  a  $y$ , e todos os elos de  $\gamma$  estão em  $\mathcal{E}^d(p)$ . *Not:*  $x \leftrightarrow y$ .

Para  $x \in \mathbb{Z}^d$ , seja  $\mathcal{C}_x$  o *aglomerado de  $x$* :  $\mathcal{C}_x = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y\}$ .

Dizemos o sítio  $x$  *percola* se  $|\mathcal{C}_x| = \infty$ , e que percolação ocorre no modelo se  $x$  *percolar* para algum  $x \in \mathbb{Z}^d$ .

Seja  $\theta = \theta(p) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}| = \infty)$ , onde  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$  é o aglom da origem.

## Obs.

- 1) Claramente  $\theta(0) = 0$  e  $\theta(1) = 1$ .
- 2) Inv p/transl:  $\theta = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_x| = \infty) \forall x$ .
- 3) Seja o evento  $A = \text{o modelo percola} = \bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} \{|\mathcal{C}_x| = \infty\}$ ;
  - a) se  $\theta = 0$ , então por subadtvdd  $\mathbb{P}(A) = 0$ ;
  - b) como  $A$  é caudal (não depende de  $\{\omega_e, e \in \mathcal{F}\}$  p/qquer  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}^d$  finito), segue da Lei 0-1 de Kolmogorov que, se  $\theta > 0$ , então  $\mathbb{P}(A) = 1$ .

# Proposição 1

$\theta = \theta(p, d) : [0, 1] \times \{1, 2, \dots\} \rightarrow [0, 1]$  é não decrescente em  $p$  e  $d$ .

**Dem.** Vamos construir modelos de perc *não homogêneos* de forma *acoplada*, usando a família de va's iid  $\mathcal{U} = \{U_e; e \in \mathcal{E}^d\}$  c/distr Uniforme( $[0, 1]$ ), em vez de  $\mathcal{B}$ .

Dado  $\mathbf{P} = \{p_e, e \in \mathcal{E}^d\} \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d}$ , declaramos o elo  $e$  **P-aberto** se  $U_e < p_e$ ; do contrário,  $e$  será dito **P-fechado**.

$x, y \in \mathbb{Z}^d$  são **P-conectados** se ( $x = y$  ou) houver um caminho de elos **P-abertos** ligando  $x$  a  $y$ ; *not*:  $x \overset{\mathbf{P}}{\leftrightarrow} y$

Seja  $\mathcal{C}_x(\mathbf{P}) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \overset{\mathbf{P}}{\leftrightarrow} y\}$ . Modelo original:  $\mathbf{P} = P_d := \{p\}^{\mathcal{E}^d}$ .

Sejam  $\mathcal{E}_0^{d+1} = \{(x, y) \in \mathcal{E}^{d+1} : x, y \in \mathbb{Z}^d \times \{0\}\}$  e

$$P_{d+1}^d := \{p\}^{\mathcal{E}_0^{d+1}} \times \{0\}^{\mathcal{E}^{d+1} \setminus \mathcal{E}_0^{d+1}}.$$

## Dem. Prop 1 (cont)

Para  $\mathbf{P}, \mathbf{P}' \in [0, 1]^{\mathcal{E}^d}$  escreveremos  $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$  se  $p_e \leq p'_e \forall e \in \mathcal{E}^d$ .

Agora note que

1) se  $\mathbf{P} \leq \mathbf{P}'$ , então  $\mathcal{C}_x(\mathbf{P}) \subset \mathcal{C}_x(\mathbf{P}')$ ,  $x \in \mathbb{Z}^d$ ;

2)  $\therefore \theta(\mathbf{P}) = \mathbb{P}(|\mathcal{C}_0(\mathbf{P})| < \infty) \leq \mathbb{P}(|\mathcal{C}_0(\mathbf{P}')| < \infty) = \theta(\mathbf{P}')$ .

3)  $P_d \leq P'_d := \{p'_e\}^{\mathcal{E}^d}$ , se  $p \leq p'$ ;  $P_{d+1}^d \leq P_{d+1}$ ;

4)  $\therefore \theta(p, d) = \theta(P_d) \leq \theta(P'_d) = \theta(p', d)$ ;

$$\theta(p, d) = \theta(P_{d+1}^d) \leq \theta(P_{d+1}) = \theta(p, d + 1). \quad \square$$

## Parâmetro crítico

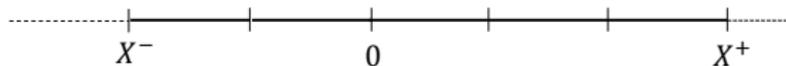
Seja  $p_c = \sup\{\theta(p) = 0\}$ . Prop 1  $\Rightarrow \theta(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p < p_c; \\ > 0, & \text{se } p > p_c. \end{cases}$

Diremos que o modelo exibe *transição de fase não trivial* se  $p_c \in (0, 1)$ ; do contrário, diremos que o modelo é *trivial*.

### Proposição 2

Em  $d = 1$ , o modelo é trivial.

**Dem.** Sejam  $X^+ = \sup\{x \geq 0 : (x, x + 1) \text{ está fechado, e}$   
 $X^- = \inf\{x \leq 0 : (x - 1, x) \text{ está fechado.}$



$p < 1$ :  $|X^-|, X^+$  iid  $\sim$  Geométrica( $1 - p$ )  $\therefore |X^-|, X^+ < \infty$  qc;

logo  $\theta(p) = \mathbb{P}(\underbrace{|X^-| + X^+ + 1}_{|C|} = \infty) = 0.$  □

# Teorema 1

Em  $d \geq 2$ , o modelo exibe transição de fase não trivial.

**Dem.** O resultado segue combinando-se os seguintes dois lemas com a Prop 1. □

**Lema 1.** Se  $p < \frac{1}{2^{d-1}}$ , então  $\theta(p) = 0$ .

**Lema 2.** Em  $d = 2$ , se  $p > 2/3$ , então  $\theta(p) > 0$ .

**Obs.** Os dois lemas mostram que  $\frac{1}{2^{d-1}} \leq p_c = p_c(d) \leq \frac{2}{3}$ .

Kesten (1990):  $p_c(d) \sim \frac{1}{2^d}$ .

## Dem. Lema 1

Basta mostrar que  $\mathbb{E}(|\mathcal{C}|) < \infty$  se  $p < \frac{1}{2d-1}$ .

Note que

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}| &= \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}\{0 \leftrightarrow x\} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{1}\left\{ \bigcup_{\gamma \in \Lambda_x} \{\gamma \text{ está aberto}\} \right\} \\ &\leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \sum_{\gamma \in \Lambda_x} \mathbb{1}\{\gamma \text{ está aberto}\} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\gamma \in \Lambda'_n} \mathbb{1}\{\gamma \text{ está aberto}\}, \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $\Lambda_x = \{\text{caminhos ligando } 0 \text{ a } x\}$  e

$\Lambda'_n = \{\text{caminhos de compr } n \text{ começando na origem}\}$ .

Note agora que  $\forall \gamma \in \Lambda'_n$

$\mathbb{P}(\gamma \text{ está aberto}) = p^n$ , e que  $|\Lambda'_n| \leq 2d(2d-1)^{n-1}$ ,  $n \geq 1$ .

Disto e de (1) segue que

$$\mathbb{E}(|\mathcal{C}|) \leq 1 + 2dp \sum_{n \geq 0} [(2d-1)p]^n < \infty, \text{ se } p < \frac{1}{2d-1}. \quad \square$$

## Dem. Lema 2

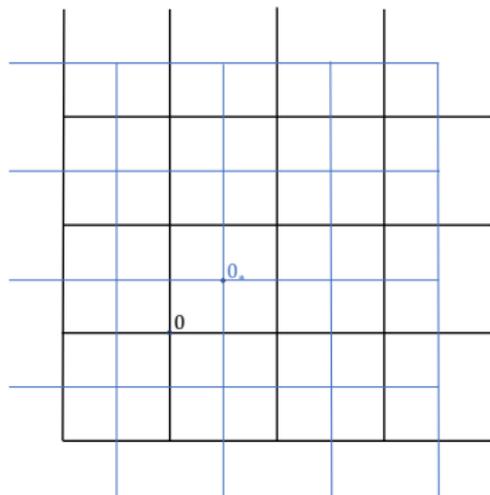
Vamos explorar a autodualidade de  $\mathcal{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{E}^2)$ .

Seja  $\mathcal{L}_*^2 = (\mathbb{Z}_*^2, \mathcal{E}_*^2)$  o grafo dual de  $\mathcal{L}^2 = (\mathbb{Z}^2, \mathcal{E}^2)$ , ie,

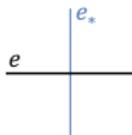
$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left\{ \left(x_1 + \frac{1}{2}, x_2 + \frac{1}{2}\right) : (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

$$\mathcal{E}_*^2 = \{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{Z}_*^2 \text{ e } \|x - y\|_1 = 1 \}$$

Note que  $\mathcal{L}^2$  e  $\mathcal{L}_*^2$  são isomorfos.



Para  $e \in \mathcal{E}^2$ , seja  $e_*$  o (único) elo de  $\mathcal{E}_*^2$  *secante* a  $e$ .



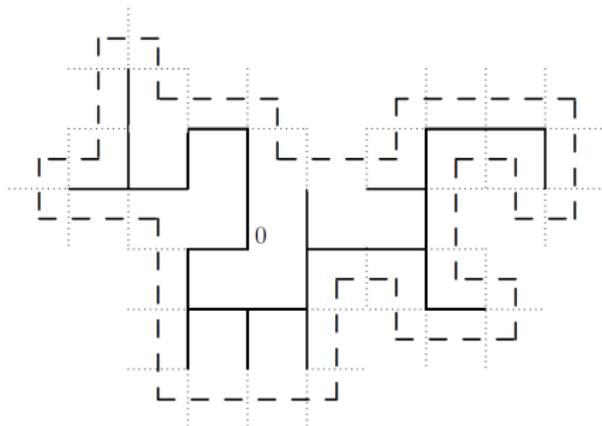
A relação  $e:e_*$  é 1:1.

## Dem. Lema 2 (cont) — Fato geométrico sobre $\mathcal{L}^2$

Seja  $C \subset \mathbb{Z}^2$  *finito* e *conexo* (ie, para cada par de sítios  $x, y$  de  $C$ , existe um caminho ligando  $x$  a  $y$  totalmente contido em  $C$ ) contendo 0. Seja  $\partial_E^+ C$  a *fronteira exterior de elos* de  $C$ , ie

$$\partial_E^+ C = \{ \langle x, y \rangle \in \mathcal{E}^2 : x \in C, y \notin C, \exists \text{ um caminho infinito começando em } y \text{ sem intersecção com } C \}.$$

Então  $\{e_* : e \in \partial_E^+ C\}$  formam um *circuito\** em  $\mathcal{L}_*^2$  em torno de 0.



..... : elos de  $\partial_E^+ C$   
——— : elos de  $C$   
---- : elos de  $\mathcal{E}_*^2$

\*  $\{x_0, \dots, x_n\}$ :  $x_0 = x_n$  e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  e  $\{x_0, \dots, x_{n-1}\}$  são caminhos

## Dem. Lema 2 (cont)

Se declararmos  $e_* \in \mathcal{E}_*^2$  *aberto* sse  $e$  estiver *fechado*, temos em  $\mathcal{L}_*^2$  um modelo de percolação com par  $1 - p$ .

Do fato geométrico acima, segue

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{C}| < \infty) &= \mathbb{P}(\exists \text{ um circuito aberto em } \mathcal{L}_*^2 \text{ em torno de } 0) \\ &\leq \sum_{\gamma_* \in \Lambda_*} \mathbb{P}(\gamma_* \text{ está aberto}) \leq \sum_{n \geq 4} \sum_{\gamma_* \in \Lambda_*(n)} \mathbb{P}(\gamma_* \text{ está aberto}), \end{aligned} \quad (2)$$

onde  $\Lambda_* = \{\text{circuitos de } \mathcal{L}_*^2 \text{ em torno de } 0\}$  e

$$\Lambda_*(n) = \{\text{circuitos de } \mathcal{L}_*^2 \text{ em torno de } 0 \text{ de compr } n\}$$

Logo

$$\begin{aligned} \theta(p) &\geq 1 - \sum_{n \geq 4} (1-p)^n |\Lambda_*(n)| \geq 1 - \frac{1}{2} \sum_{n \geq 4} n 3^{n-2} (1-p)^n \\ &= 1 - \frac{1}{18} \sum_{n \geq 4} n [3(1-p)]^n =: 1 - \frac{1}{18} \psi(p). \end{aligned} \quad (3)$$

Então  $\psi$  é decresc, cont em  $(\frac{2}{3}, 1]$  e  $\psi(1) = 0$ :  $\exists \frac{2}{3} < p^* < 1$  tq  $\psi(p^*) = 18$  em  $(p^*, 1]$ ; (3)  $\Rightarrow \theta(p) > 0$  em  $(p^*, 1]$ .

## Dem. Lema 2 (cont) — Refinamento

Note que  $\psi(p) \rightarrow \infty$  qdo  $p \downarrow \frac{2}{3}$ :

ñ há como obter  $\theta(p) > 0 \forall p > \frac{2}{3}$  de (3) apenas.

Seja  $\mathcal{Q}_N = \{-N, \dots, N\}^2$  e considere os eventos

$A_N = \{\text{todos os elos de } \mathcal{Q}_N \text{ estão abertos}\}$  e

$B_N = \{\text{existe um circuito aberto em } \mathcal{L}_*^2 \text{ em torno de } \mathcal{Q}_N\}$ .

**Obs.**  $A_N$  e  $B_N$  indep e  $|\mathcal{C}| = \infty$  em  $A_N \cap B_N^c$ .

Logo,  $\theta(p) \geq \mathbb{P}(A_N \cap B_N^c) = \mathbb{P}(A_N) \mathbb{P}(B_N^c) \forall N$ .

Como  $\mathbb{P}(A_N) > 0 \forall N$ , basta mostrar que  $\mathbb{P}(B_N) < 1$  para algum  $N$  para obter  $\theta(p) > 0$ .

## Refinamento (cont)

Como em (2):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_N) &= \mathbb{P}(\exists \text{ um circuito aberto em } \mathcal{L}_*^2 \text{ em torno de } Q_N) \\ &\leq \sum_{n \geq 8N} \sum_{\gamma_* \in \Lambda_*(n)} \mathbb{P}(\gamma_* \text{ está aberto}),\end{aligned}$$

Como em (3):

$$\mathbb{P}(B_N) \leq \frac{1}{18} \sum_{n \geq 8N} n [3(1-p)]^n =: \frac{1}{18} \psi_N(p).$$

Dado  $p > \frac{2}{3}$ ,  $\psi_1(p)$  é uma série convergente;

logo,  $\exists N = N(p) \geq 1$  tq  $\psi_N(p) < 18$ .

□ Lema 2

## Obs.

1) Note que  $\chi(p) = \mathbb{E}(|\mathcal{C}|)$  é ã decrescente e  $< \infty$  em  $[0, \frac{1}{2d-1})$ .

Seja  $p_H = \sup\{p \in [0, 1] : \chi(p) < \infty\}$ ; então  $p_H \leq p_c$ .

2) Seja  $D = \text{diam } \mathcal{C} = \sup\{\|x\|_1 : x \in \mathcal{C}\}$  o diâmetro de  $\mathcal{C}$ .

Dos args da dem do Lema 1, temos que a cauda da distr de  $D$  tem dec exp se  $p < \frac{1}{2d-1}$ , ie,  $\exists \beta = \beta(p) > 0$  tq

$$\mathbb{P}(D > n) \leq e^{-\beta n} \quad \forall n \text{ gde.}$$

A ppdd de a distr de  $D$  ter dec exp é decrescente, ie,

se vale para  $p$ , então vale tb para  $p' < p$ .

Seja  $p_E = \sup\{p \in [0, 1] : \text{a cauda de } D \text{ tem dec exp}\}$ ; então  $p_E \leq p_H$ . Sabe-se que  $p_E = p_H = p_c$  (*unicidade do pto crítico*<sup>†</sup>).

3) O Teo 1 não diz se  $\theta(p_c, d) = 0$  ou  $> 0$  em  $d \geq 2$ . Acredita-se que  $\theta(p_c, d) = 0 \quad \forall d \geq 2$ ; sabemos isto em  $d = 2$  e para  $d$  gde (por métodos difs).

4)  $p_c(2) = \frac{1}{2}$ ; o valor exato de  $p_c(d)$ ,  $d \geq 3$ , é desconhecido.

<sup>†</sup>temos dec exp p/a distr de  $|\mathcal{C}| \quad \forall p < p_c$

## Unicidade do aglomerado infinito

Seja  $\eta = \#\{\text{aglomerados infinitos distintos do modelo de perc}\}$ .

Então  $\eta$  é inv p/transl, ie,  $\forall z \in \mathbb{Z}^d$  e  $\omega \in \mathcal{B}$ :  $\eta(\omega) = \eta(\omega + z)$ ,

onde  $\omega + z \in \mathcal{B}$  é tq  $(\omega + z)_{\langle x, y \rangle} = \omega_{\langle x+z, y+z \rangle}$ .

Lei 0-1 p/va's inv p/transl em espaços produto  $\Rightarrow \eta =$  é trivial,

ie,  $\exists$  cte  $\kappa = \kappa_p \in \mathbb{N}$  tq  $\mathbb{P}(\eta = \kappa) = 1$ ; claro:  $\kappa = 0$ , se  $\theta = 0$ ; e

$\kappa \geq 1$ , se  $\theta > 0$ .

**Teorema 2.** Se  $\theta > 0$ , então  $\kappa = 1$ .

**Obs.** Compare com

(i)  $G_n(p)$ ,  $p = \lambda/n$ ,  $\lambda > 1$ : unicidade do aglomerado gigante, e

(ii) perc independente na árvore regular de grau  $d \geq 3$ :

$\infty$ 's agloms  $\infty$ 's se  $p > 1/d$ .

**Dem.** Resultado segue das duas proposições a seguir. □

# Proposições

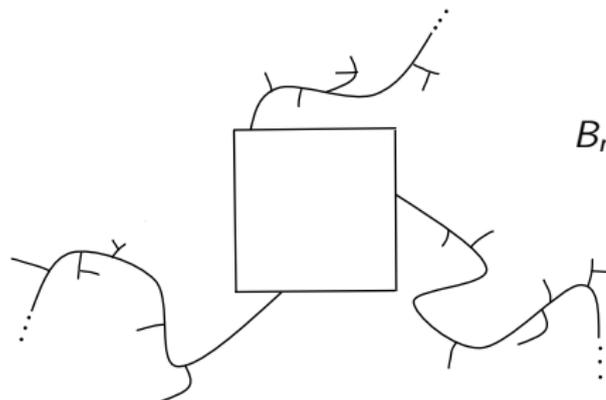
**Proposição 2.** Se  $\theta > 0$ , então  $\kappa = 1$  ou  $\infty$ .

**Proposição 3.** Se  $\theta > 0$ , então  $\kappa \leq 2$ .

**Dem Prop 1.** Vamos mostrar que se  $\mathbb{P}(\eta = k) > 0$  para algum  $2 \leq k < \infty$ , então  $\mathbb{P}(\eta = 1) > 0$ . O resultado segue disto e da trivialidade de  $\eta$ .

Seja  $k$  como acima, e  $\mathcal{Q}_n$  como na dem do Lema 2, slide 14, e sejam os eventos

$A_n = \{\text{todos os agloms } \infty\text{'s tocam } \mathcal{Q}_n\}$ ;



$B_n = \{\text{elos de } \mathcal{Q}_n \text{ todos abertos}\}.$

## Dem Prop 1 (cont)

Note que  $A_n \nearrow$  em  $n$ , e que  $A_n \cap \{\eta = k\} \rightarrow \{\eta = k\}$  qdo  $n \rightarrow \infty$ .

Disto e da hip de que  $\mathbb{P}(\eta = k) > 0$ :  $\exists n$  tq  $\mathbb{P}(A_n) > 0$ .

Note:  $\mathbb{P}(B_n) > 0 \forall n$ . Logo, como  $A_n$  e  $B_n$  indep  $\forall n$ :

$$\mathbb{P}(A_n \cap B_n) = \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}(B_n) > 0.$$

Como  $A_n \cap B_n \subset \{\eta = 1\}$ , segue que  $\mathbb{P}(\eta = 1) > 0$ . □

**Obs.** Note que o argumento não funciona p/  $k = \infty$ .

### Dem Prop 2.

Vamos supor que  $\mathbb{P}(\eta \geq 3) > 0$  e obter uma contradição.

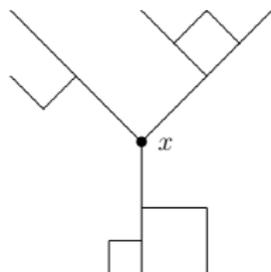
Para isto, precisaremos da seguinte noção e resultado sobre grafos.

## Pontos triplos

Seja  $G = (S, E)$  um grafo conexo.

$x \in S$  será dito um *ponto triplo* para  $G$  se

- i) existirem apenas 3 elos de  $E$  tocando  $x$  e
- ii) o grafo  $G \setminus \{x\}$ , em que  $x$  é removido de  $S$  e os 3 elos tocando em  $x$  são removidos de  $E$ , tem exatamente 3 componentes conexos, denotados  $E_1(x)$ ,  $E_2(x)$ ,  $E_3(x)$ , e chamados de *ramos*.



## Exercício sobre pontos triplos

- (a) Suponha que  $G$  seja um grafo conexo e que  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sejam pontos triplos distintos para  $G$ . Mostre que, p/algum  $i$ , 2 dos 3 ramos em  $x_i$ , digamos  $E_2(x_i)$  e  $E_3(x_i)$ , não contêm nenhum dos outros pontos triplos ( $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$ ).

*Sugestão:* indução em  $n$ .

- (b) Seja  $G'$  o grafo obtido de  $G$  e  $x_1, \dots, x_n$  de (a) removendo-se todos os sítios de  $E_3(x_i)$  e todos os elos tocando estes sítios. Mostre que  $\{x_1, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}$  são pontos triplos para  $G'$ .

- (c) Suponha que  $G$  seja um grafo conexo e que  $x_1, \dots, x_n$  sejam pontos triplos distintos de  $G$ . Entre os  $3n$  ramos,

$$E_1(x_1), E_2(x_1), E_3(x_1), E_1(x_2), \dots, E_3(x_n),$$

mostre que podemos achar pelo menos  $n + 2$  ramos *disjuntos*.

## Dem Prop 2 (cont)

Seja  $F_n = \{\text{pelo menos 3 agloms } \infty\text{'s } \neq\text{'s tocamos } Q_{n-1}\}$ .

Como  $F_n \uparrow \{\eta \geq 3\}$  qdo  $n \uparrow \infty$ :  $\exists n$  tq  $\mathbb{P}(F_n) > 0$ .

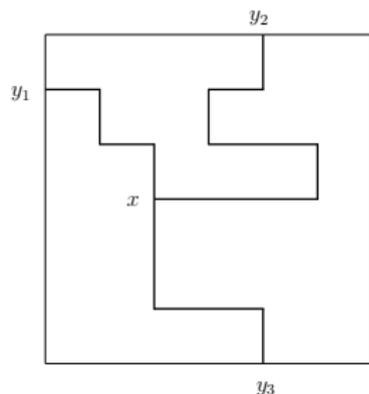
Dados  $y_1, y_2, y_3$  ptos  $\neq$ 's no int das faces de  $\partial Q_n$ , seja

$F_n(y_1, y_2, y_3) = \{y_1, y_2, y_3 \in \text{aglo } \infty\text{'s } \neq\text{'s usando só elos ext a } Q_n\}$

Como  $F_n \subset \bigcup_{y_1, y_2, y_3} F_n(y_1, y_2, y_3)$ :

$\mathbb{P}(F_n(y_1, y_2, y_3)) > 0$  para alguns  $y_1, y_2, y_3$ .

Dados estes  $y_1, y_2, y_3$ , seja  $x = x(y_1, y_2, y_3)$  um pto int de  $Q_n$  tq há 3 caminhos de elos disjs no int  $Q_n$  ligando  $x$  a  $y_1, y_2, y_3$  resp.



## Dem Prop 2 (cont)

Seja agora

$F'_n(y_1, y_2, y_3) = \{\text{os 3 caminhos mencionados acima estão abertos, todos os demais elos do interior de } Q_n \text{ estão fechados}\}.$

Logo,

$$\mathbb{P}(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F'_n(y_1, y_2, y_3)) \stackrel{\text{ind}}{=} \mathbb{P}(F_{n_0}(y_1, y_2, y_3)) \mathcal{P}(F'_n(y_1, y_2, y_3)) > 0.$$

Um ponto triplo (segundo a definição no exercício acima) será dito um *ponto triplo especial (pte)* se seus ramos são infinitos.

Note que

$$\{x(y_1, y_2, y_3) \text{ é um pte}\} \supset F_{n_0}(y_1, y_2, y_3) \cap F'_n(y_1, y_2, y_3).$$

Segue que, se  $\mathbb{P}(\eta \geq 3) > 0$ , então  $\mathbb{P}(x \text{ é um pte}) > 0$ .

Inv p/transl: prob acima não depende de  $x$ . Vamos denotá-la por  $\rho$ .

## Dem Prop 2 (cont)

Segue que

$$\mathbb{E}(\#\{\text{pontos triplos especiais em } \mathcal{Q}_{n-1}\}) = (2n-1)^d \rho,$$

e logo

$$\mathbb{P}(\#\{\text{pte's em } \mathcal{Q}_{n-1}\} \geq (2n-1)^d \rho) > 0 \quad \forall n \quad (4)$$

(pois  $\forall$  va integrável  $X$ :  $P(X \geq E(X)) > 0$ ).

Agora, segue do exercício acima que o número de pte's em  $\mathcal{Q}_{n-1}$  é sempre inferior a  $2d(2n-1)^{d-1} \forall n$ , o que contradiz (4) para  $n$  gde, concluindo a demonstração da Prop 2.

Falta então apenas justificar a afirmação no começo do parágrafo anterior. Faremos isto a seguir.

## Dem Prop 2 (cont)

Cada ramo de cada ponto triplo especial (pte) toca um (ou mais) sítios em alguma face de  $\partial Q_n$ .

**Obs.**  $2d(2n - 1)^{d-1}$  é o número total de sítios em  $\partial Q_n$ .

Considere os componentes conexos dos pte's usando apenas elos no interior de  $Q_n$ .

Digamos que tais componentes contenham  $n_1, n_2, \dots$  pte's cada (isto é, o  $i$ -ésimo componente contem  $n_i$  pte's).

Logo  $n_1 + n_2 + \dots$  dá o total de pte's em  $Q_{n-1}$ .

Da conclusão do ex acima: no componente  $i$  podemos achar pelo menos  $n_i + 2$  ramos disjuntos dentre as  $3n_i$  possibilidades.

Logo, temos  $(n_1 + 2) + (n_2 + 2) + \dots$  ramos disjuntos de todos os pontos triplos.

Como cada um toca pelo menos um ponto das faces de  $Q_n$ , será necessário que

$$n_1 + n_2 + \dots \leq (n_1 + 2) + (n_2 + 2) + \dots \leq 2d(2n - 1)^{d-1}. \square_{\text{Prop 2}}$$

# Ferramenta útil — Desigualdade de FKG

## Monotonicidade

Ordem parcial em  $\Omega := \{0, 1\}^{\mathcal{E}^d}$ :  $\omega, \omega' \in \Omega$ , diremos que

$$\omega \leq \omega' \Leftrightarrow \omega_e \leq \omega'_e \text{ para todo } e \in \mathcal{E}^d.$$

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é dita crescente se for crescente na ordem parcial acima, ie,  $X(\omega) \leq X(\omega')$  sempre que  $\omega \leq \omega'$ .

$A \subset \Omega$  é dito crescente se  $\mathbb{1}_A$  for crescente.

Em palavras, com o modelo de percolação em mente, um evento  $A$  do modelo é crescente sempre que para cada configuração de  $\Omega$  em que  $A$  ocorre, ao abrirmos mais elos nesta configuração, o evento  $A$  continua ocorrendo.

Exemplos de eventos crescentes:  $\{x \leftrightarrow y\}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ , e  $\{|\mathcal{C}| = \infty\}$ .

## Formulação equivalente/explicita do modelo de percolação

Podemos formular o modelo de percolação definido no início como a tripla  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\Omega$  como acima e

- ▶  $\mathcal{F}$  é a  $\sigma$ -álgebra produto (gerada pelos cilindros de  $\Omega$ ), e
- ▶  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\rho$  é a medida produto com marginais  $\mathbb{P}(\omega_e = 1) = \rho$ .

## Desigualdade de (Harris-)FKG

**Proposição 4.** Sejam  $X$  e  $Y$  va's crescentes e limitadas em  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Então

$$\mathbb{E}(XY) \geq \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

**Dem.** Vamos tomar inicialmente  $X$  e  $Y$  cilíndricas, ie, dependem apenas de um conjunto finito de elos  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

Provaremos a prop neste caso por indução em  $n$ .

$n = 1$ :  $X = f(\omega_{e_1})$  e  $Y = g(\omega_{e_1})$ , onde  $f$  e  $g$  são crescentes.

Seja  $\omega'$  uma cópia independente de  $\omega_{e_1}$  (ie,  $\omega'$  e  $\omega_{e_1}$  são iid).

Então  $[f(\omega_{e_1}) - f(\omega')][g(\omega_{e_1}) - g(\omega')] \geq 0$ , pois  $f, g$  crescentes.

Logo  $\mathbb{E}\{[f(\omega_{e_1}) - f(\omega')][g(\omega_{e_1}) - g(\omega')]\} \geq 0$ .

## $\neq$ FKG (cont)

Expandindo o termo à esquerda, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\omega_{e_1})g(\omega_{e_1})] + \mathbb{E}[f(\omega')g(\omega')] \\ \geq \mathbb{E}[f(\omega_{e_1})g(\omega')] + \mathbb{E}[f(\omega')g(\omega_{e_1})].\end{aligned}\tag{5}$$

$\omega_{e_1}, \omega'$  indep: lado dir =

$$\mathbb{E}[f(\omega_{e_1})]\mathbb{E}[g(\omega')] + \mathbb{E}[f(\omega')]\mathbb{E}[g(\omega_{e_1})].$$

$\omega_{e_1}, \omega'$  id distr: (5) fica

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(\omega_{e_1})g(\omega_{e_1})] + \mathbb{E}[f(\omega_{e_1})g(\omega_{e_1})] \\ \geq \mathbb{E}[f(\omega_{e_1})]\mathbb{E}[g(\omega_{e_1})] + \mathbb{E}[f(\omega_{e_1})]\mathbb{E}[g(\omega_{e_1})],\end{aligned}$$

ie,

$$2\mathbb{E}[f(\omega_{e_1})g(\omega_{e_1})] \geq 2\mathbb{E}[f(\omega_{e_1})]\mathbb{E}[g(\omega_{e_1})]$$

e o resultado para  $n = 1$  é imediato.

## $\neq$ FKG (cont)

Supondo-o válido para  $n = k$ , seja  $n = k + 1$ . Então

$X = f(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})$  e  $Y = g(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})$ ,  
 $f, g$  crescentes. Agora,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \mathbb{E}[f(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})g(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})] \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[f(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})g(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})\middle|\omega_{e_{k+1}}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Na esp condicional acima,  $\omega_{e_{k+1}}$  fixo:  $f, g$  podem ser vistas como  
fçs de  $\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}$ ; pela hip ind, lado dir  $\geq$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left[f(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})\middle|\omega_{e_{k+1}}\right] \times\right. \\ \left. \times \mathbb{E}\left[g(\omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_k}, \omega_{e_{k+1}})\middle|\omega_{e_{k+1}}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Agora é claro que as esperanças condicionais acima são funções  
crescentes de  $\omega_{e_{k+1}}$ . Novo uso da hipótese de indução produz o  
resultado para  $n = k + 1$ , completando o passo de indução.

## $\neq$ FKG (cont)

Para o caso geral, sejam  $X$  e  $Y$  não necess/te cilíndricas, e seja  $e_1, e_2, \dots$  uma enumeração de  $\mathcal{E}^d$ .

Pelo Teorema da Convergência de Martingais,

$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X | \omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_n}],$$

e similarmente para  $Y$ .

Pelo passo anterior,  $\neq$  FKG vale qdo  $X$  e  $Y$  são subst por

$$\mathbb{E}[X | \omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_n}] \text{ e } \mathbb{E}[Y | \omega_{e_1}, \dots, \omega_{e_n}].$$

Passagem ao lim em  $n$  e o Teo Conv Dom dão o caso geral.

□ $\neq$ FKG

**Corolário.** Se  $A$  e  $B$  forem eventos crescentes, então

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

**Dem.** Basta aplicar a Prop 4 a  $X = \mathbb{1}_A$  e  $Y = \mathbb{1}_B$ .

□

## Modelo em $\mathbb{Z}^2$

**Proposição 5.**  $\theta(\frac{1}{2}, 2) = 0$

**Dem.** Usaremos o seguinte corolário da  $\neq$  FKG.

### *Truque da raiz quadrada*

Se  $A_1, \dots, A_\ell$  crescentes e de probs iguais, então

$$1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\ell} A_i) = \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\ell} A_i^c) \stackrel{\text{FKG}}{\geq} [1 - \mathbb{P}(A_1)]^{\ell}.$$

Logo  $\mathbb{P}(A_1) \geq 1 - [1 - \mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\ell} A_i)]^{1/\ell}$ .

Sejam  $\mathcal{T}_n = [0, n]^2$  e

$A_n^e := \{\text{aglom } \infty \text{ de } \mathcal{L}^2 \text{ toca face esq de } \mathcal{T}_n \text{ sem usar elos de } \mathcal{T}_n\}$ .

Similar/e:  $A_n^d$ ,  $A_n^c$  e  $A_n^b$ , subst esq por dir, sup e inf, resp.

## Dem. Prop 5 (cont)

Suponha que  $\theta(\frac{1}{2}) > 0$ . Obs 3b, slide 5:

$\mathbb{P}(\text{existir um aglomerado aberto infinito}) = 1$ .

Segue que  $\mathbb{P}(A_n^e \cup A_n^d \cup A_n^c \cup A_n^b) \rightarrow 1$  qdo  $n \rightarrow \infty$ .

Truque da  $\sqrt{\cdot}$ :  $\mathbb{P}(A_n^u) \rightarrow 1$  qdo  $n \rightarrow \infty$ ,  $u = e, d, c, b$ .

Seja  $N$  tq  $\mathbb{P}(A_N^u) > 7/8$  e  $\mathbb{P}(A_{N-1}^u) > 7/8$ ,  $u = e, d, c, b$ .

Seja agora  $T_n^* = [0, n-1] + (1/2, 1/2)$  e

$A_*^e(n) = \{\text{aglo } \infty \text{ de } \mathcal{L}_*^2 \text{ toca face esq de } T_n^* \text{ sem usar elos de } T_n^*\}$ .

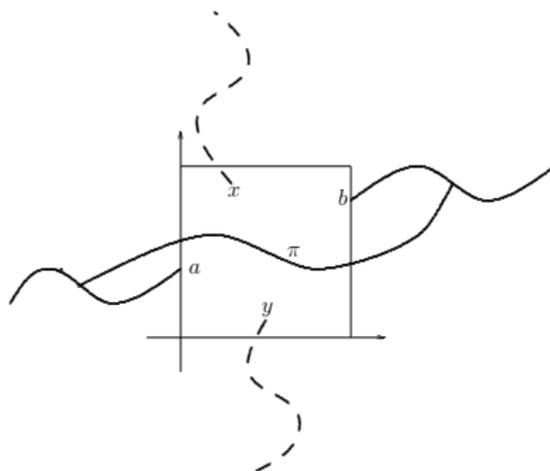
Similar/e:  $A_*^d(n)$ ,  $A_*^c(n)$  e  $A_*^b(n)$ , subst esq p/ dir, sup e inf, resp.

Temos então  $\mathbb{P}(A_*^u(N)) = \mathbb{P}(A_{N-1}^u) > 7/8$ .

## Dem. Prop 5 (cont)

Seja  $A = A_N^e \cap A_n^d \cap A_*^c(N) \cap A_*^b(N)$ .

Note que, em  $A$ , se houver apenas um aglo  $\infty$  em  $\mathcal{L}^2$  e apenas um aglo  $\infty$  em  $\mathcal{L}_*^2$ , então os caminhos abertos infinitos à esquerda e à direita de  $T_N$  devem se ligar por elos abertos por dentro de  $T_N^*$  pois por fora os caminhos infinitos abertos acima e abaixo de  $T_N^*$  bloqueiam a passagem.



## Dem. Prop 5 (cont)

Similarmente, os caminhos infinitos abertos em  $\mathcal{L}_*^2$  acima e abaixo de  $T_N^*$  devem se ligar por elos abertos por dentro de  $T_N$ . Mas neste caso, as ligações por dentro de  $T_N$  e  $T_N^*$  devem se cruzar, o que é impossível.

Logo, em  $A$  há 2 aglos  $\infty$ 's disj em  $\mathcal{L}^2$  ou 2 aglos  $\infty$ 's disjuntos em  $\mathcal{L}_*^2$ ; Teo 2 (unici// do aglo  $\infty$ ):  $\mathbb{P}(A) = 0$ . □

Para o próx result, sejam os seguintes conj's de sítios

$$\Lambda_n = \{x \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x_1 \leq n+1, 0 \leq x_2 \leq n\}$$

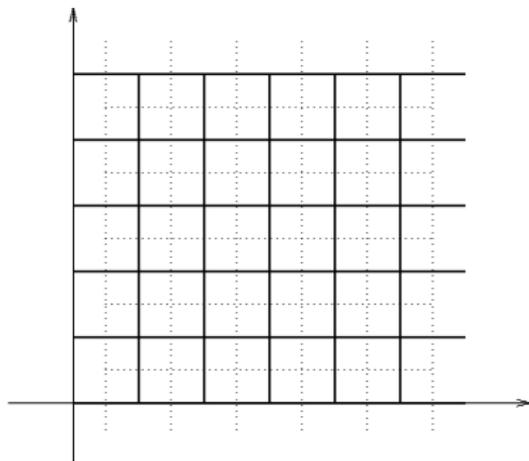
$$\Lambda_n^* = \{x + (1/2, 1/2), x \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x_1 \leq n, -1 \leq x_2 \leq n\},$$

e os subgrafos

$$S_n = \Lambda_n \cup \{\text{elos de } \mathcal{E}^2 \text{ em } \Lambda_n \text{ exc } \langle x, y \rangle \text{ com } \begin{array}{l} x_1 = y_1 = 0 \text{ ou} \\ x_1 = y_1 = n+1 \end{array}\}$$

$$S_n^* = \Lambda_n^* \cup \{\text{elos de } \mathcal{E}_*^2 \text{ em } \Lambda_n^* \text{ exc } \langle x, y \rangle \text{ com } \begin{array}{l} x_2 = y_2 = -1 \text{ ou} \\ x_2 = y_2 = n \end{array}\}$$

# Cruzamentos horizontais e verticais



$S_5$  e seu dual  $S_5^*$

Seja  $A_n = \{\exists \text{ caminho aberto em } S_n \text{ ligando faces esq e dir}\}$ .

**Proposição 6.**  $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2} \forall n$

## Dem Prop 6

Seja  $A_n^* = \{\exists \text{ caminho aberto em } S_n^* \text{ ligando faces sup e inf}\}$ .

Temos que  $A_n \cap A_n^* = \emptyset$ , (6)

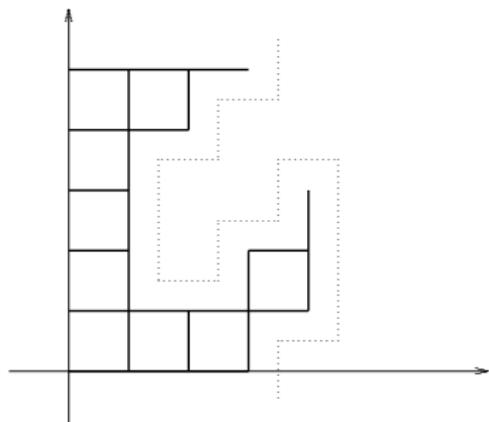
senão haverá cruzamento entre caminho aberto em  $S_n$  e caminho aberto de  $S_n^*$ , o que é impossível.

Por outro lado  $A_n \cup A_n^* = \Omega$ . (7)

De fato, suponha que  $A_n$  não ocorra. Seja  $D$  o conjunto de sítios de  $S_n$  alcançados por caminhos abertos a partir da face esq, junto com os elos ligando tais sítios.

Por um fato geom similar ao do slide 12, existe um caminho em  $\mathcal{L}_*^2$  cruzando  $S_n^*$  de cima a baixo, secante apenas a elos de  $S_n$  contidos na fronteira de  $D$ . Logo este caminho será aberto e  $A_n^*$  ocorre.

## Dem Prop 6 (cont)



$$(6) \text{ e } (7): \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_n^*) = 1.$$

$$\text{Mas } \mathbb{P}(A_n^*) = \mathbb{P}_{1-p}(A_n):$$

$$\mathbb{P}(A_n) = 1/2$$



**Obs.** A Prop 5  $\Rightarrow p_c(2) \geq \frac{1}{2}$ . O dec exp da cauda da distr d(o diam d)e  $\mathcal{C}$ , discutido na 2<sup>a</sup> obs do slide 16, junto à Prop 6  $\Rightarrow p_c(2) \leq \frac{1}{2}$ , e logo  $p_c(2) = \frac{1}{2}$ .