Diagonalização de matriz estocástica 2×2

Seja

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

uma matriz estocástica, onde $\alpha, \beta \in [0,1]$. Se $\alpha + \beta = 0$, então $\mathbf{P}$ é diagonal, um caso trivial. Suponha então que

$$\alpha + \beta > 0. \tag{1}$$

Para diagonalizar $\mathbf{P}$, vamos começar por achar seus auto valores.

Autovalores de P

O polinômio característico associado a $\mathbf{P}$ é dado por

$$\det(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\alpha-\lambda & \alpha \\ \beta & 1-\beta-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (2-\alpha-\beta)\lambda + 1 - \alpha - \beta, \tag{2}$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade, e suas raízes, os autovalores de $\mathbf{P}$, são

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - \alpha - \beta. \tag{3}$$

Autovetores de P

Um auto vetor $\mathbf{v}_1 = (x_1, y_1)$ de $\mathbf{P}$ associado a λ_1 deve satisfazer

$$\mathbf{P}\mathbf{v}_1^t = \lambda_1 \mathbf{v}_1^t = \mathbf{v}_1^t, \tag{4}$$

onde, dado um vetor $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}^t$ denota o vetor transposto de $\mathbf{v}$. (4) pode ser escrito

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

o que equivale ao sistema de equações

$$(1-\alpha)x_1 + \alpha y_1 = x_1 \tag{6}$$
$$\beta x_1 + (1-\beta) y_1 = y_1 \tag{7}$$

que por sua vez equivale a

$$\alpha y_1 = \alpha x_1 \tag{8}$$
$$\beta x_1 = \beta y_1. \tag{9}$$

De (1) concluímos que $x_1 = y_1$, e logo podemos tomar

$$\mathbf{v}_1 = (1,1) \tag{10}$$

como auto vetor de $\mathbf{P}$ associado a λ_1.

Repetindo o procedimento para λ_2, temos

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = (1-\alpha-\beta) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

o que equivale ao sistema de equações

$$\begin{aligned} (1-\alpha)x_2 + \alpha y_2 &= (1-\alpha-\beta)x_2 \qquad (12) \\ \beta x_2 + (1-\beta)y_2 &= (1-\alpha-\beta)y_2 \qquad (13) \end{aligned}$$

que por sua vez equivale a

$$\alpha y_2 \;=\; -\beta x_2. \tag{14}$$

De (1) concluímos que

$$\mathbf{v}_2 = (-\alpha, \beta) \tag{15}$$

é um auto vetor de $\mathbf{P}$ associado a λ_2.

Diagonalização de P

Sejam agora

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = (\mathbf{v}_1^t \mathbf{v}_2^t) &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & \beta \end{pmatrix}, \qquad (16) \\ \mathbf{D} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}. \qquad (17) \end{aligned}$$

Das relações entre auto valores e auto vetores, segue que

$$\mathbf{PA} = \mathbf{AD}. \tag{18}$$

De (1) temos que $\det \mathbf{A} \neq 0$; logo A é inversível, e logo

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \alpha \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Concluímos finalmente que

$$\mathbf{P} = \mathbf{ADA}^{-1}. \tag{20}$$

Comportamento assintótico de potências de P

De (20) temos que

$$\mathbf{P}^n = \mathbf{A}\mathbf{D}^n\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-\alpha-\beta)^n \end{pmatrix}\mathbf{A}^{-1}. \tag{21}$$

para $n \geq 1$.

Pela continuidade das operações com matrizes envolvidas, temos que o comportamento assintótico de $\mathbf{P}$ se reduz ao comportamento assintótico da sequência numérica $((1-\alpha-\beta)^n)_{n\geq 1}$. Fora o caso em que $\alpha+\beta=0$, já excluído em (1), vamos excluir também o caso em que $\alpha=\beta=1$ (trata-se de um outro caso *determinístico*). Nos demais casos, temos que

$$(1-\alpha-\beta)^n \to 0 \tag{22}$$

quando $n \to \infty$ (pois então $|1-\alpha-\beta|<1$), e finalmente

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}^n = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}. \tag{23}$$