

# Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

# Equações de Kolmogorov

## Tempos de parada

Uma va  $T \geq 0$  é dita um *tempo de parada* para  $(X_t)$  se o evento  $\{T \leq t\}$  depender apenas de  $(X_s)_{s \leq t}$  para todo  $t$

## Teorema 1 (Ppdde Forte de Markov)

Seja  $(X_t) \sim \text{PMS}(\mu, \mathbf{Q})$  e  $T$  um t.p. p/ $(X_t)$ .

Então, dados  $\{T < \infty\}$  e  $\{X_T = x\}$ ,

$(X_{T+t})_{t \geq 0} \sim \text{PMS}(\delta_x, \mathbf{Q})$ , indep de  $(X_s)_{s \leq T}$ .

## Eqs Kolmogorov (cont)

### Teorema 2

Seja  $(X_t)$  um processo de saltos cont à dir em  $\mathcal{S}$  *finito*. Seja  $\mathbf{Q}$  uma  $Q$ -matriz em  $\mathcal{S}$  com matriz de saltos  $\mathbf{\Pi}$ . São equivalentes:

(a) Dado que  $X_0 = x$ , a cadeia de saltos  $(Y_n)$  é uma  $CM(\delta_x, \mathbf{\Pi})$ , e  $p/n \geq 1$ , dados  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ , os tempos entre saltos  $T_1, \dots, T_n$  são va's exps indep c/txs  $q_{Y_0}, \dots, q_{Y_{n-1}}$ , resp.

(b) Para  $t, h > 0$ , dado  $X_t = x$ ,  $X_{t+h}$  é indep de  $(X_s)_{s \leq t}$  e qdo  $h \downarrow 0$ , unif/e em  $t$

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = y \mid X_t = x) = \delta_{xy} + q_{xy}h + o(h);$$

(c) Dados  $n \geq 1$  e  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$  e  $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$ :

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

onde  $\{\mathbf{P}(t) = (P_{xy}(t); x, y \in \mathcal{S}), t \geq 0\}$  é a slç da eq avançada

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}.$$

## Dem. Teo 2

$$(a \Rightarrow b) \quad \mathbb{P}_x(X_h = x) \stackrel{(1)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 > h) = e^{-q_x h} = 1 + q_{xx} h + o(h)$$

e para  $y \neq x$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_h = y) &\stackrel{(2)}{\geq} \mathbb{P}_x(T_1 < h, Y_1 = y, T_2 > h) = (1 - e^{-q_x h}) \pi_{xy} e^{-q_y h} \\ &= q_{xy} h + o(h) \end{aligned}$$

Logo,

$$1 = \sum_y \mathbb{P}_x(X_h = y) \stackrel{(3)}{\geq} \overbrace{\sum_y \delta_{xy}}^1 + \left( \overbrace{\sum_y q_{xy}}^0 \right) h + o(h) = 1 + o(h),$$

e podemos concluir que as  $\geq$ 's em (1) e (2) são '='s.

(b  $\Rightarrow$  c) Façamos  $P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$ . Dados  $x, y \in \mathcal{S}$  e  $t, h > 0$ :

$$\begin{aligned} P_{xy}(t+h) &= \sum_z \mathbb{P}_x(X_t = z) \mathbb{P}(X_{t+h} = y | X_t = z) \\ &= \sum_z P_{xz}(t) (\delta_{zy} + q_{zy} h + o(h)) \end{aligned}$$

## (b $\Rightarrow$ c) (cont)

Logo,

$$\frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = \sum_z P_{xz}(t)q_{zy} + \frac{o(h)}{h};$$

segue que

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h}(P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)) = (\mathbf{P}(t)\mathbf{Q})_{xy}.$$

Podemos repetir o argumento com  $P_{xy}(t)$  e  $P_{xy}(t-h)$ , e obter

$$P'_{xy}(t) = (\mathbf{P}(t)\mathbf{Q})_{xy}.$$

(c  $\Rightarrow$  a) Como no caso do PP.



**Obs. 1)** Como  $\mathcal{S}$  é finito, como já vimos, podemos substituir a eq avançada pela atrasada

$$\mathbf{P}' = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t), \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

(já que ambas eqs têm uma única e mesma slç).

## Obs. (cont)

2) Note que (b) pode ser escrita de forma matricial. Seja

$$\mathbf{P}(s, t) = (P_{xy}(t - s))_{x, y \in \mathcal{S}}.$$

Então, (b) equivale a

$$\mathbf{P}(t, t + h) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}h + \mathbf{o}(h).$$

Logo, para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0, t) &= \mathbf{P}\left(0, \frac{t}{n}\right) \mathbf{P}\left(\frac{t}{n}, \frac{2t}{n}\right) \cdots \mathbf{P}\left(\frac{(n-1)t}{n}, t\right) \\ &\simeq \left[\mathbf{I} + \mathbf{Q}\frac{t}{n} + \mathbf{o}\left(\frac{t}{n}\right)\right] \rightarrow e^{t\mathbf{Q}}\end{aligned}$$

qdo  $n \rightarrow \infty$ .

## $\mathcal{S}$ infinito

Vamos escrever as eqs de Kolmogorov.

### Eqs avançadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

ou

$$P'_{xy}(t) = \sum_{z \in \mathcal{S}} P_{xz}(t)q_{zy}, x, y \in \mathcal{S}, P_{xy}(0) = \delta_{xy}.$$

### Eqs atrasadas

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}\mathbf{P}(t), \mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$$

ou

$$P'_{xy}(t) = \sum_{z \in \mathcal{S}} q_{xz}P_{zy}(t), x, y \in \mathcal{S}, P_{xy}(0) = \delta_{xy}.$$

## Teorema 3

Seja  $\mathbf{Q}$  uma  $Q$ -matriz. Então a eq atrasada tem uma slç mínima não negativa  $\mathbf{P}(t)$ ,  $t \geq 0$ . Esta slç tem a ppdde de semigrupo:

$$\mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(s + t), \quad s, t \geq 0.$$

**Obs.** Se  $\mathcal{S}$  for finito, então pelo Teo 2 do cj de slides inicial sobre CMTC, temos que  $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}$ , que pelo mesmo resultado é a única slç de ambas eqs de Kolmogorov.



## Teorema 4

Seja  $(X_t)$  um processo mínimo cont à dir em  $\mathcal{S}^*$ . Seja  $\mathbf{Q}$  uma  $Q$ -matriz em  $\mathcal{S}$  com matriz de saltos  $\mathbf{\Pi}$  e semigrupo  $\mathbf{P}(t)$  dado acima. São equivalentes:


(a) Dado  $X_0 = x$ , a cadeia de saltos  $(Y_n) \sim \text{CM}(\delta_x, \mathbf{\Pi})$ , e dados  $n \geq 1$  e  $Y_0, \dots, Y_{n-1}$ , os tempos de visita sucessivos  $T_1, \dots, T_n$  são va's exps indep c/txs  $q_{Y_0}, \dots, q_{Y_{n-1}}$ , resp.

(b) Dados  $n \geq 1$  e  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_{n+1}$  e  $x_0, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{S}$ :

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n).$$

Nestas conds, chamaremos  $(X_t)$  de *PMS com gerador (ou gerado por)  $\mathbf{Q}$* . Not:  $(X_t) \sim \text{PMS}(\cdot, \mathbf{Q})$

---

\*Vide Slide 15 do cj de slides inicial sobre CMTc. 

## Dem. Teos 3 e 4

Seja  $(X_t)$  o PMS mínimo associado a  $\mathbf{Q}$  construído nos slides da aula sobre PMS (vide Slide 4 daquele cj de slides), e seja

$P_{xy}(t) = \mathbb{P}_x(X_t = y)$ ,  $\mathbf{P}(t) = (P_{xy}(t))_{x,y \in \mathcal{S}}$ .

1) Vamos mostrar que  $\mathbf{P}$  satisfaz a eq atrasada.  $P/x, y \in \mathcal{S}$ , dado  $T_1$ :

$$\begin{aligned} P_{xy}(t) &= \mathbb{P}_x(X_t = y | T_1 > t) e^{-q_x t} + \int_0^t ds q_x e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} \pi_{xz} P_{zy}(t-s) \\ &= \delta_{xy} e^{-q_x t} + \int_0^t ds e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} q_{xz} P_{zy}(t-s) \end{aligned} \quad (1)$$

Logo,

$$P_{xy}(t) e^{q_x t} = \delta_{xy} + \int_0^t ds \sum_{z \neq x} q_{xz} e^{q_x s} P_{zy}(s), \quad (2)$$

o que mostra que  $P_{xy}(t)$  é contínua e diferenciável (pois a série no integrando é uni/e conv e logo uma fç cont).

## Dem. Teos 3 e 4 (cont)

Diferenciando (2) nos dois lados:

$$q_x e^{q_x t} P_{xy}(t) + e^{q_x t} P'_{xy}(t) = \sum_{z \neq x} q_{xz} e^{q_x t} P_{zy}(t),$$

e logo, cancelando  $e^{q_x t}$  nos dois lados, e como  $q_x = -q_{xx}$ :

$$P'_{xy}(t) = \sum_z q_{xz} P_{zy}(t) \quad (3)$$

2) O mesmo argumento para provar (1) (condiciona/o em  $T_1$  e o destino do 1o salto, usando a ppdde de Markov e homog temporal) tb prova que, para  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_{n+1}) &= \delta_{xy} e^{-q_x t} \\ &+ \int_0^t ds e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} q_{xz} \mathbb{P}_z(X_{t-s} = y, t-s < S_n). \quad (4) \end{aligned}$$

Por outro lado, se  $\tilde{\mathbf{P}}(t)$  satisfaz a eq atrasada (na forma diferencial), então tb a satisfaz na forma integral (para ver isto, basta percorrer os passos de (1) a (3) acima em reverso.)

## Dem. Teos 3 e 4 (cont)

$$\tilde{P}_{xy}(t) = \delta_{xy}e^{-q_x t} + \int_0^t ds e^{-q_x s} \sum_{z \neq x} q_{xz} \tilde{P}_{zy}(t-s). \quad (5)$$

Se  $\tilde{P}_{xy}(t) \geq 0$ , então

$$\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_0) = 0 \leq \tilde{P}_{xy}(t) \quad \forall x, y \in \mathcal{S}. \quad (6)$$

Subst (6) em (4) e usando (5) recursiva/e, obtemos

$\mathbb{P}_x(X_t = y, t < S_n) \leq \tilde{P}_{xy}(t) \quad \forall n$ , e tomando limite qdo  $n \rightarrow \infty$ :

$$\mathbb{P}_x(X_t = y) \leq \tilde{P}_{xy}(t) \quad \square_{\text{minimal!}}$$

3) A ppdde de semigrupo segue da ppdde de Markov:

$$\begin{aligned} P_{xy}(s+t) &= \sum_z \mathbb{P}_x(X_s = z) \mathbb{P}_x(X_{s+t} = y | X_s = z) \\ &= \sum_z \mathbb{P}_x(X_s = z) \mathbb{P}_z(X_t = y) \end{aligned} \quad \square_{\text{Teo 3}}$$

## Dem. Teos 3 e 4 (cont)

4) Supondo que  $(X_t)$  satisfaz (a), como fizemos até agora, e usando a PM:

$$\mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_0} = x_0) = P_{x_n x_{n+1}}(t_{n+1} - t_n),$$

e (b) está satisfeita. Finalmente, um argumento como aquele utilizado para o PP mostra que (b) implica em (a). □<sub>Teo 4</sub>

**Obs.** Se  $\mathbf{Q}$  for não explosiva, então temos unicidade das slçs probabilísticas das eqs atrasadas.

Exemplo de processo não mínimo: PN explosivo voltando à origem (c/prob 1) em  $\zeta$ .

## Teorema 5

A slç mínima não negativa da eq atrasada coincide com a slç mínima não negativa da eq avançada.

**Dem.** Livro