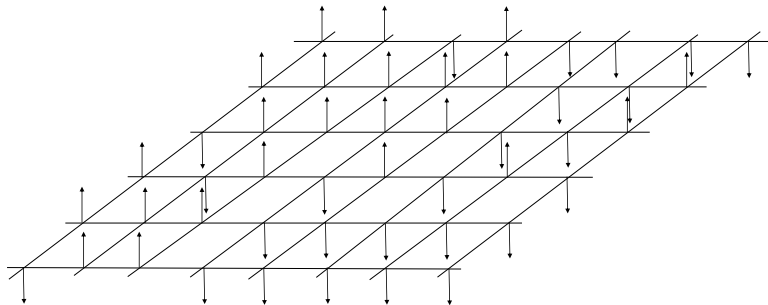


# Sistemas Complexos

Luiz Renato Fontes

# Modelo de Ising (ferromagnético) em $\mathbb{Z}^d$

Spins em  $\mathbb{Z}^d$



$\mathcal{S} = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  ... configurações de spins em  $\mathbb{Z}^d$ .

# Modelo de Ising

Material (ferro)magnético em equilíbrio termodinâmico:

$$\Lambda \subset \mathbb{Z}^d, \text{ finito; } \mathcal{S}_\Lambda = \{-1, +1\}^\Lambda$$

Energia/**Hamiltoniano** de  $\sigma \in \mathcal{S}_\Lambda$  c/cond de fronteira  $\eta \in \mathcal{S}_{\mathbb{Z}^d}$

$$H_\Lambda^\eta(\sigma) = - \sum_{x,y \in \Lambda}^* J_{xy} \sigma_x \sigma_y - \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x - \sum_{x \in \Lambda, y \notin \Lambda} J_{xy} \sigma_x \eta_y,$$

onde  $J_{xy} \geq 0$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}^d$ ;  $J_{xy} = 0$ , se  $\|x - y\|_1 \neq 1$ : ctes de acoplamento;  
 $(h_x)_{x \in \mathbb{Z}^d} \in [0, \infty)^{\mathbb{Z}^d}$ : campo externo.

Eventual/e:  $J_{xy} \equiv J > 0$ ,  $x \sim y$ †;  $h_x \equiv 0$ ;  $\eta \equiv +1$  ou  $\equiv 0$

**Medida de Gibbs:**  $\mu_\Lambda^\eta(\sigma) = \frac{1}{Z_\Lambda^\eta} \exp\{-\beta H_\Lambda^\eta(\sigma)\}$ ,  $\sigma \in \mathcal{S}_\Lambda$ , onde

$$\beta \geq 0 \text{ (par: inv temp); } Z_\Lambda^\eta = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_\Lambda} e^{-\beta H_\Lambda^\eta(\sigma)}: \text{normalização}$$

---

\*Cada par conta só uma vez na soma.

†*Not:*  $x \sim y$  se  $\|x - y\|_1 = 1$ ;  $x, y$  ditos *vizinhos mais próximos*

## Obs. ( $h_x \equiv 0$ ; $\eta \equiv +1$ ou $\eta \equiv -1$ )

- 1) Competição entre confs alinhadas (com maiores pesos de Gibbs individuais) e confs desordenadas (em maior número), mediada  $p/\beta$ ;
- 2) Qto maior  $\beta$ , maior o peso das confs alinhadas;
- 3) Em vol finito,  $\beta > 0$ : tendência de alinha/o com a fronteira;
- 4) Em vol *infinito*: tendência pode desaparecer;
- 5)  $J_{xy} \equiv J > 0$ ,  $x \sim y$ , vol  $\infty$ ,  $d \geq 2$ : *trans. fase*;  $\exists \beta_c \in (0, \infty)$ :
  - a) se  $\beta < \beta_c$ , alinhamento desaparece;
  - b)  $\beta > \beta_c$ : alinhamento persiste (*magnetização espontânea*);
- 6)  $J_{xy} \equiv J$ ,  $x \sim y$ ,  $d = 1$ : não há magnetização espontânea;
- 7)  $J_{xy} \equiv J$ ,  $x \sim y$ ,  $h_x \equiv h > 0$ : alinha/o com o campo vence.

# Desigualdades de correlação

De agora em diante:  $\eta \equiv +1$  (fronteira +) ou  $\equiv 0$  (fronteira livre) (subst  $\eta$  por + ou 0, resp, em  $H$ ,  $\mu$  e  $Z$ ).

Dado  $\emptyset \neq A \subset \Lambda$  e  $\sigma \in \mathcal{S}_\Lambda$ , seja  $\sigma_A = \prod_{x \in A} \sigma_x$ ; e  $\sigma_\emptyset = 1$ .

Not: 1) Dada  $f : \mathcal{S}_\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  e  $* = +$  ou  $0$ :

$$\langle f \rangle_\Lambda^* = \mu_\Lambda^*(f) = \int f(\sigma) d\mu_\Lambda^*(\sigma) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_\Lambda} f(\sigma) \mu_\Lambda^*(\sigma),$$

$$2) \langle \sigma_A; \sigma_B \rangle_\Lambda^* = \langle \sigma_A \sigma_B \rangle_\Lambda^* - \langle \sigma_A \rangle_\Lambda^* \langle \sigma_B \rangle_\Lambda^*.$$

**Proposição 1.** ( $\neq$ 's de Griffiths)

$\forall A, B \subset \Lambda$  e  $* = +$  ou  $0$

(i)  $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^* \geq 0$ ;

(ii)  $\langle \sigma_A; \sigma_B \rangle_\Lambda^* \geq 0$ .

# ≠'s Griffiths

**Dem.** Basta fazer o caso  $* = 0$ , pois

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda}^+ = \lim_{h \rightarrow \infty} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda}^0, \quad (0)$$

onde  $\bar{\Lambda} = \Lambda \cup \partial^+ \Lambda$ ,  $\partial^+ \Lambda = \{y \notin \Lambda : x \sim y\}$ , e  $h_x \equiv h$  em  $\partial^+ \Lambda$ .

(i) Basta mostrar que

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{\Lambda}} \sigma_A \exp \left\{ \sum_{x,y \in \Lambda} J_{xy} \sigma_x \sigma_y + \sum_{x \in \Lambda} h_x \sigma_x \right\} \geq 0 \quad (1)$$

( $\beta$  incorporado nos  $J$ s e  $h$ s, spg).

Sejam  $\{e_i, i \in \mathcal{M} = \{1, \dots, M\}\}$  e  $\{x_j, j \in \mathcal{N} = \{1, \dots, N\}\}$  enumerações dos elos e sítios de  $\Lambda$ , resp; façamos  $J_i = J_{e_i} = J_{y_i, z_i}$ ,  $\sigma_{e_i} = \sigma_{y_i} \sigma_{z_i}$ , onde  $y_i, z_i$  são as extr de  $e_i$ , e  $h_j = h_{x_j}$ ; então

$$\exp\{\dots\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{\sigma} \sigma_A \left( \sum_{i \in \mathcal{M}} J_i \sigma_{e_i} \right)^k \left( \sum_{j \in \mathcal{N}} h_j \sigma_{x_j} \right)^{n-k}$$

## Dem. Griffiths (i) (cont)

Expandindo as potências, temos, resp,

$$\sum_{(i_1, \dots, i_k) \in \mathcal{M}^k} J_{i_1 \dots i_k} \sigma_{e_{i_1} \dots e_{i_k}}, \quad \sum_{(j_1, \dots, j_{n-k}) \in \mathcal{N}^{n-k}} h_{j_1 \dots j_{n-k}} \sigma_{x_{j_1} \dots x_{j_{n-k}}},$$

onde  $J_{i_1 \dots i_k} = J_{i_1} \cdots J_{i_k} \geq 0$ ;  $\sigma_{e_{i_1} \dots e_{i_k}} = \sigma_{e_{i_1}} \cdots \sigma_{e_{i_k}}$ ,

e similarmente  $h_{j_1 \dots j_{n-k}} \geq 0$  e  $\sigma_{x_{j_1} \dots x_{j_{n-k}}}$ .

Logo, o lado esq de (1) fica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{i_1, \dots, i_k} J_{i_1 \dots i_k} \sum_{j_1, \dots, j_{n-k}} h_{j_1 \dots j_{n-k}} \sum_{\sigma} \overbrace{\sigma_A \sigma_{e_{i_1} \dots e_{i_k}} \sigma_{x_{j_1} \dots x_{j_{n-k}}}}^{\sigma_F},$$

para certo  $F \subset \Lambda$  (que pode ser  $\emptyset$ ).

Basta agora verificar que se  $F \neq \emptyset$ , então

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{\Lambda}} \sigma_F = \prod_{x \in \Lambda \setminus F} \underbrace{\sum_{\sigma_x \in \{-1, +1\}} 1}_{2} \times \prod_{x \in F} \underbrace{\sum_{\sigma_x \in \{-1, +1\}} \sigma_x}_{0} = 0 \quad \square(i)$$

## Dem. Griffiths (ii)

Seja  $\sigma'$  uma cópia indep de  $\sigma$ , ie,  $\sigma'$  tem distr marg  $\mu_\Lambda^0 = \mu$  (omitimos índices 0 e  $\Lambda$  no resto da dem) e é indep de  $\sigma$ ; então

$$\langle \sigma_A; \sigma_B \rangle = \langle \sigma_A \sigma_B \rangle - \langle \sigma_A \rangle \langle \sigma_B \rangle = \frac{1}{2} \langle (\sigma_A - \sigma'_A)(\sigma_B - \sigma'_B) \rangle. \quad (2)$$

Sejam agora, para  $x \in \Lambda$ ,  $\tau_x = \frac{\sigma_x + \sigma'_x}{2}$ ,  $\tau'_x = \frac{\sigma_x - \sigma'_x}{2}$ ; então

$$\sigma_A - \sigma'_A = \prod_{x \in A} \sigma_x - \prod_{x \in A} \sigma'_x = \prod_{x \in A} (\tau_x + \tau'_x) - \prod_{x \in A} (\tau_x - \tau'_x)$$

$$= \sum_{CCA} \underbrace{\prod_{x \in C} \tau_x}_{\tau_C} \underbrace{\prod_{x \in A \setminus C} \tau'_x}_{\tau'_{A \setminus C}} \underbrace{\left\{ 1 - (-1)^{|A \setminus C|} \right\}}_{a_C \geq 0} = \sum_{CCA} a_C \tau_C \tau'_{A \setminus C};$$

$$\therefore (\sigma_A - \sigma'_A)(\sigma_B - \sigma'_B) = \sum_{\substack{CCA \\ DCB}} a_C \underbrace{b_D}_{1 - (-1)^{|B \setminus D|}} \tau_C \tau_D \tau'_{A \setminus C} \tau'_{B \setminus D} \quad (3)$$



## Dem. Griffiths (ii) (cont)

Repetindo:

$$(\sigma_A - \sigma'_A)(\sigma_B - \sigma'_B) = \sum_{\substack{CCA \\ DCB}} a_C b_D \tau_C \tau_D \tau'_{A \setminus C} \tau'_{B \setminus D} \quad (3)$$

Por outro lado (inc  $\beta$  nos  $J$ s e  $h$ s),

$$\mu(\sigma)\mu(\sigma') = \frac{1}{Z^2} \exp \left\{ \sum_{x,y} \overbrace{J_{xy}(\sigma_x \sigma_y + \sigma'_x \sigma'_y)}^{2J_{xy}(\tau_x \tau_y + \tau'_x \tau'_y)} + \sum_x \overbrace{h_x(\sigma_x + \sigma'_x)}^{2h_x \tau_x = \tilde{h}_x \tau_x} \right\} \quad (4)$$

$$\therefore Z^2 \langle (\sigma_A - \sigma'_A)(\sigma_B - \sigma'_B) \rangle =$$

$$\sum_{\substack{CCA \\ DCB}} a_C b_D \sum_{\tau_\Lambda, \tau'_\Lambda \in \mathcal{S}'_\Lambda := \{-1, 0, +1\}^\Lambda} \tau_C \tau_D \tau'_{A \setminus C} \tau'_{B \setminus D} \exp \left\{ \sum_i \tilde{J}_i(\tau_{e_i} + \tau'_{e_i}) + \sum_j \tilde{h}_j \tau_{x_j} \right\} \quad (5)$$

## Dem. Griffiths (ii) (cont)

A soma interna em (5) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_{\tau_\Lambda, \tau'_\Lambda \in \mathcal{S}'_\Lambda} \tau_C \tau_D \exp \left\{ \sum_i \tilde{J}_i \tau_{e_i} + \sum_j \tilde{h}_j \tau_{x_j} \right\} \tau'_{A \setminus C} \tau'_{B \setminus D} \exp \left\{ \sum_i \tilde{J}_i \tau'_{e_i} \right\}$$
$$= \sum_{\tau_\Lambda \in \mathcal{S}'_\Lambda} \tau_C \tau_D \exp \left\{ \sum_i \tilde{J}_i \tau_{e_i} + \sum_j \tilde{h}_j \tau_{x_j} \right\} \times \quad (6)$$

$$\times \sum_{\tau'_\Lambda \in \mathcal{S}'_\Lambda} \tau'_{A \setminus C} \tau'_{B \setminus D} \exp \left\{ \sum_i \tilde{J}_i \tau'_{e_i} \right\} \quad (7)$$

Os fatores em (6,7) são similares — no segundo o campo externo é  $\equiv 0$ . Basta mostrar que o primeiro é  $\geq 0$ .

## Dem. Griffiths (ii) (cont)

Procedendo como em (i), expandindo a exp, a expr em (6) pode ser escrita como a soma de termos  $\geq 0$  multiplicando termos da forma

$$\sum_{\tau_\Lambda \in \mathcal{S}'_\Lambda} \prod_{x \in F} \tau_x^{k_x}, \text{ com } F \subset \Lambda \text{ e } k_x \in \{0, 1, 2\}, x \in \Lambda.$$

Como na parte (i), esta soma é um produto de fatores obviamente positivos multiplicado por produto de termos da forma

$$\sum_{\tau_x \in \{-1, 0, +1\}} \tau_x^{k_x}, \text{ p/algum } x \in \Lambda.$$

Cada uma destas somas acima é óbvia/e  $\geq 0$ , se  $k_x = 0$  ou 2; e se anula, se  $k_x = 1$ ; de toda forma, é sempre  $\geq 0$ .

Logo, a expr em (5) é  $\geq 0$ , e o resultado segue da subst em (2).

□(ii)

## ≠'s Griffiths — Corolários

1) Dado  $A \subset \Lambda$ ,  $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^*$  cresc em cada  $J_{xy}$  e  $h_x$ ,  $x, y \in \Lambda$ , e  $\therefore$  em  $\beta$ .

Pois, tomando a derivada de  $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^*$  em relação a qquer um destes argumentos, basta notar que é  $\geq 0$ :

$$\frac{d}{dh_x} \langle \sigma_A \rangle_\Lambda^* = \langle \sigma_A; \sigma_x \rangle_\Lambda^*, \quad \frac{d}{dJ_{xy}} \langle \sigma_A \rangle_\Lambda^* = \langle \sigma_A; \sigma_{\{x,y\}} \rangle_\Lambda^*$$

são ambas  $\geq 0$  por Griffiths (ii).

2) De (0) e de 1), segue que  $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^0 \leq \langle \sigma_A \rangle_\Lambda^+$ .

3) "  $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^*$  é crescente em  $d$ ." Seja  $d \geq 2$  e suponha que

$$A \subset \mathbb{Z}^{d-1} \times \{0\}; \text{ seja } A^- = \{x \in \mathbb{Z}^{d-1} : (x, 0) \in A\}.$$

De 1):  $\langle \sigma_A \rangle_\Lambda^* \geq \langle \sigma_{A^-} \rangle_{\Lambda^-}^*$ , onde  $\Lambda^- = \{x \in \mathbb{Z}^{d-1} : (x, 0) \in \Lambda\}$ .

## $\neq$ 's Griffiths — Corolários (cont)

4) Se  $A \subset \Lambda \subset \Lambda'$ , então: a)  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda}^0 \leq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda'}^0$ , e b)  $\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda}^+ \geq \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda'}^+$ .

Checagem de a): explicitando dep em  $\mathbf{J} = \{J_{xy}\}$ , temos que

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda}^0(\mathbf{J}) = \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda'}^0(\mathbf{J}^0), \text{ com } J_{xy}^0 = \begin{cases} J_{xy}, & \text{se } x, y \in \Lambda; \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Checagem de b): explicitando dep em  $\mathbf{h} = \{h_x\}$ , temos que

$$\langle \sigma_A \rangle_{\Lambda}^+(\mathbf{J}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda'}^+(\mathbf{h}^+), \text{ com } J_{xy}^+ = \begin{cases} h_x, & \text{se } x \in \Lambda; \\ h, & \text{c.c.} \end{cases}$$

4') De 4) segue que, dada  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$  uma seq cresc (na ordem de inclusão) de subcjs finitos de  $\mathbb{Z}^d$  tq  $\cup_{n \geq 1} \Lambda_n = \mathbb{Z}^d$ . Então  $\forall A \subset \mathbb{Z}^d$  finito, os seguintes limites existem (por monotonicidade)

$$\langle \sigma_A \rangle^* := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \sigma_A \rangle_{\Lambda_n}^*, \quad * = 0, +, \quad (*)$$

e não dependem da particular seq  $(\Lambda_n)_{n \geq 1}$  satisfazendo as conds acima. (Verifique!)

## Limite termodinâmico

Para  $* = 0, +$ , de 4') acima segue que os limites  $\langle \sigma_A \rangle^*$ ,  $A \subset \mathbb{Z}^d$  finito, definidos acima, podem ser usados para obter medidas de probabilidade  $\mu^*$  em  $(\mathcal{S}, \mathcal{G})$ , onde  $\mathcal{S} = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^d}$  e  $\mathcal{G}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos subcjs cilíndricos de  $\mathcal{S}$  tq

$$\mu^*(\sigma_A) = \langle \sigma_A \rangle^* \quad \forall A \subset \mathbb{Z}^d \text{ finito.}$$

(Isto segue do fato de qq fç cilíndrica  $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma comb linear de  $\sigma_{A'}$ 's com  $A'$ 's finitos<sup>‡</sup>.)

Pelo restante deste tópico do curso, vamos nos ater a estas *medidas de Gibbs em volume infinito*, em particular,  $\mu^+$ .

Não é difícil checar que as ppddes de monotonicidade de  $\mu_\Lambda^*$  estabelecidas acima são herdadas por  $\mu^*$ .

---

<sup>‡</sup>inclusive  $A = \emptyset$

## Transição de fase

Vamos tomar o modelo sem campo, ie, com  $h_x \equiv 0$ . Neste caso, temos a simetria por troca global de spins  $\sigma_x \rightarrow -\sigma_x \forall x$  em  $\mu_\Lambda^0$  para todo  $\Lambda$  finito, e então tb em  $\mu^0$ . Logo a magnetização da origem c/ fronteira livre  $\mu^0(\sigma_0) = \langle \sigma_0 \rangle^0 = 0$ .

Não é difícil ver por um argumento direto que se houver um caminho  $\gamma$  (no mesmo sentido usado em percolação) ligando a origem à fronteira de  $\Lambda$  finito tq  $J. > 0$  em todos os elos de  $\gamma$ , e se  $\beta > 0$ , então  $\langle \sigma_0 \rangle_\Lambda^+ > 0$ . (Veremos um argumento indireto adiante.)

Mas isto não garante que  $\langle \sigma_0 \rangle^+ > 0$  para todo  $\beta > 0$ , mesmo que  $J_{xy}$  seja uniforme/e positivo para todo elo vizinho mais próximo  $\langle x, y \rangle$  de  $\mathbb{Z}^d$  (na linguagem de percolação).

A seguir definimos o parâmetro crítico do modelo.

## Transição de fase (cont)

$$\beta_c = \sup\{\beta \geq 0 : \langle \sigma_0 \rangle^+ = 0\}$$

$\{\dots\}$  é não-vazio (verifique que contém 0), mas pode ser ilimitado, neste caso  $\beta_c = \infty$ . Pela monotonicidade em  $\beta$ :

$$\langle \sigma_0 \rangle^+ \begin{cases} = 0, & \text{se } \beta < \beta_c; \\ > 0, & \text{se } \beta > \beta_c. \end{cases}$$

Diremos que o modelo de Ising exibe *transição de fase* (não trivial) se  $\beta_c \in (0, \infty)$ .

Veremos que o modelo de Ising homogêneo ( $J_{xy} \equiv J > 0$ ,  $x \sim y$ ) sem campo ext ( $h_x \equiv 0$ ) exibe transição de fase em  $d \geq 2$ .<sup>§</sup>

Isto será feito, diferentemente do mais usual, por meio de uma representação do modelo de Ising em termos de um modelo de percolação dependente, que por sua vez será comparado com o modelo independente que já estudamos.

Começamos a seguir pelo modelo de percolação dependente.

---

<sup>§</sup>Pode-se mostrar que  $\beta_c = \infty$  em  $d = 1$ .



# Modelo de Aglomerados Aleatórios

Vamos voltar ao quadro do modelo de percolação, desta vez *em volume finito*.

Sejam  $\mathcal{Q}_n = \{-n, \dots, n\}^d$ ,  $\mathcal{E}_n = \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{E}^d : x, y \in \mathcal{Q}_n\}$ ,  $\mathcal{E}_n^+ = \{\langle x, y \rangle \in \mathcal{E}^d : x \in \mathcal{Q}_n\}$ , e  $\partial\mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_{n+1} \setminus \mathcal{E}_n^+$ .

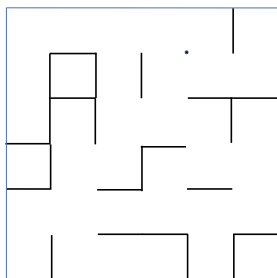
Seja  $\Omega_n = \{0, 1\}^{\mathcal{E}_n^+}$  o esp de confs de elos fechados e abertos de  $\mathcal{Q}_n^+ = \{y \in \mathbb{Z}^d : y \sim x \text{ para algum } x \in \mathcal{Q}_n\}$  (como no mod de perc, mas em vol fin), e seja

$\Omega_n^a = \Omega_n \times \{1\}^{\partial\mathcal{E}_{n+1}}$  o esp de confs de elos fechados e abertos de  $\mathcal{Q}_{n+1}$  em que os elos de  $\partial\mathcal{E}_{n+1}$  estão todos abertos (*amarrados*).

Para  $\omega \in \Omega_n$ ,  $\omega' \in \Omega_n^a$  tq  $\omega'|_{\mathcal{E}_n^+} = \omega$ , seja  $N(\omega)$  o número de aglomerados distintos determinados por  $\omega'$  em  $\mathcal{Q}_{n+1}$ .

**Obs.** Aglomerados distintos de  $\Omega_n$  (usando só elos de  $\omega$ ) que tocam  $\partial^+ \mathcal{Q}_n := \mathcal{Q}_n^+ \setminus \mathcal{Q}_n$  fazem parte de um mesmo aglomerado qdo adicionamos os elos abertos/amarrados de  $\partial\mathcal{E}_{n+1}$ .

## MAA (cont)



$\omega \in \Omega_2$  (linhas escuras);  $N(\omega) = 5$

Sejam  $p \in [0, 1]$  e  $q > 0$  parâmetros. Seja a prob em  $\Omega_n$

$$\phi_n(\omega) = \phi_n^{p,q}(\omega) = \frac{1}{Z_n} q^{N(\omega)} \mathbb{P}(\omega), \quad (8)$$

onde  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_p$  é a prob produto em  $\Omega_n$  tq  $\omega_e \sim \text{Bernoulli}(p)$ ,  
 $e \in \mathcal{E}_n^+$ , (como em perc indep), e  $Z_n$  é a normalização:

$$Z_n = Z_n(p, q) = \sum_{\omega \in \Omega_n} q^{N(\omega)} \mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}(q^N). \quad (9)$$

## Obs.

- 1)  $\phi_n^{p,1}$  é o modelo de perc indep (em  $\mathcal{Q}_n^+$ );
- 2) Para  $q \neq 1$ , trata-se de um modelo de perc *dependente*, ie, as va's  $\omega_e$ ,  $e \in \mathcal{E}_n^+$  são *dependentes*.
- 3) Veremos adiante que há uma repr simples da medida de Gibbs  $\mu_{\mathcal{Q}_n}^+$  do modelo de Ising em termos de  $\phi_n^{p,2}$  (modelo dependente), com  $p = p(\beta)$  uma fç de  $\beta$  a ser explicitada. Isto pode parecer não facilitar muito, pois transferimos a análise de  $\mu_{\mathcal{Q}_n}^+$  para  $\phi_n^{p,2}$ , que não é particularmente simples, a não ser que podemos *comparar*  $\phi_n^{p,q}$  com  $q > 1$  a  $\phi_n^{p,1}$ , que é o caso indep, por cima e por baixo. Com isto, obteremos o resultado de trans de fase para o modelo de Ising a partir do resultado de trans de fase que já obtivemos para percolação independente.

## Desigualdades de comparação

**Proposição 2.** ( $\neq$ 's de comparação)

Para  $q \geq 1$ , existe  $p' = p'(p, q)$  cont em  $(p, q)$ , cresc em  $p$ , tq  $p'(1, q) = 1$  e para todo  $n \geq 0$  e  $X : \mathcal{E}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}$  crescente, temos

$$\phi_n^{p',1}(X) \leq \phi_n^{p,q}(X) \leq \phi_n^{p,1}(X), \quad (10)$$

onde  $\phi_n^{\cdot,\cdot}(X)$  é a esperança de  $X$  sob  $\phi_n^{\cdot,\cdot}$ .

**Dem.** Segue do Exercício 2 da Lista 2.

**Obs.** 1) Podemos de fato tomar  $p' = \frac{p}{p+(1-p)q} = \frac{1}{\frac{1}{p}q - (q-1)}$ , (11)

o que indica a monotonicidade em  $p$ , mas tb em  $q$  ( $p' \searrow$  em  $q$ ).

2) Sejam a esfera em  $\mathbf{L}_1$  centrada em 0 de raio  $k$ ,

$$S_k = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 = k\}, \text{ e } \partial S_k = S_k \setminus S_{k-1}, \quad k \geq 1,$$

e o evento  $\{0 \leftrightarrow \partial S_k\} = \cup_{x \in \partial S_k} \{0 \leftrightarrow x\}$ .

## Obs. (cont)

Fazendo  $X = \mathbb{1}_{\{0 \leftrightarrow \partial S_k\}}$  em (10),  $k \leq n+1$ :

$$\phi_n^{p',1}(0 \leftrightarrow \partial S_k) \leq \phi_n^{p,q}(0 \leftrightarrow \partial S_k) \leq \phi_n^{p,1}(0 \leftrightarrow \partial S_k).$$

Sejam agora

$$\theta_q^-(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi_n^{p,q}(0 \leftrightarrow \partial S_k);$$

$$\theta_q^+(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \phi_n^{p,q}(0 \leftrightarrow \partial S_k)$$

Então  $\theta(p') = \theta_1(p') \leq \theta_q^-(p) \leq \theta_q^+(p) \leq \theta_1(p) = \theta(p)$ , e logo

$\theta_q^+(p) = 0$ , se  $p < p_c$ ; e  $\theta_q^-(p) > 0$ , se  $p' > p_c \Leftrightarrow p > \hat{p}_c := f_q^{-1}(p_c)$ ,

onde  $f_q(p) = p'(p, q) \left( (11): f_q^{-1}(r) = \frac{qr}{1 + (q-1)r} \right)$ . (12)

("Transição de fase não trivial" no MAA em  $d \geq 2$ :  $p_c < 1 \Rightarrow \hat{p}_c < 1$ ;

MAA "trivial" em  $d = 1$ ).

## Obs.

3) O limite  $\phi^{p,q} := \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n^{p,q}$  existe (como uma prob em  $(\Omega, \mathcal{F})$ ) para  $q \geq 1$  e  $\theta_q^-(p) = \theta_q^+(p) =: \theta_q(p) = \phi^{p,q}(|C| = \infty)$ .

$\theta_q(p) \nearrow$  em  $p$ ; fazendo  $p_c(q) = \sup\{p : \theta_q(p) = 0\}$ , e logo

$$\theta_q(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p < p_c(q); \\ > 0, & \text{se } p > p_c(q); \end{cases} \quad (12): \hat{p}_c \leq p_c(q) \leq p_c.$$

(MAA exhibe trans fase não trivial em  $d \geq 2$  e é trivial em  $d = 1$ .)

4) Podemos definir um outro MAA em  $\mathcal{Q}_n$ , desta vez com *fronteira livre*, ie, sem a *amarração* da fronteira imposta acima. Este modelo tb se relaciona com o modelo de Ising, mas o com fronteira livre.

O limite em  $n$  do modelo livre tb existe e tem propriedades semelhantes às do modelo amarrado.

## Representação FK do modelo de Ising

Vamos estabelecer uma repr do modelo de Ising homogêneo e sem campo ( $J_{xy} \equiv J > 0$ ,  $x \sim y$ ;  $h_x \equiv 0$ ) com fronteira + em termos de um MAA com  $q = 2$  e  $p = p(\beta J)$  adequado.

Vamos começar tomando  $J = 1$  spg (ou incorporando  $J$  em  $\beta$ ).

Dado  $\sigma \in \mathcal{S}_n := \mathcal{S}_{\mathcal{Q}_n}$ , usando a not  $\sigma_e$  intr no slide 6 (abaixo de (3))

$$\mu_n^+(\sigma) := \mu_{\mathcal{Q}_n}^+(\sigma) = \frac{1}{Z_n^+} e^{\beta \sum_{e \in \mathcal{E}_n^+} \sigma_e} = \frac{1}{Z_n'} e^{\beta \sum_{e \in \mathcal{E}_n^+} (\sigma_e - 1)}, \quad (13)$$

$$\text{com } \sigma|_{\partial^+ \mathcal{Q}_n} \equiv +1. \quad (14)$$

O *fator de Gibbs* de  $\sigma$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\prod_{e \in \mathcal{E}_n^+} e^{\beta(\sigma_e - 1)} = \prod_{e \in \mathcal{E}_n^+} (p \delta_e(\sigma) + (1 - p)),$$

onde  $p = 1 - e^{-2\beta}$  e  $\delta_e(\sigma) = \mathbb{1}_{\{\sigma_e=1\}}$ . Expandimos o produto:

$$\sum_{\omega \in \Omega_n} \prod_{e \in \mathcal{E}_n^+ : \omega_e=1} (p \delta_e(\sigma)) \prod_{e \in \mathcal{E}_n^+ : \omega_e=0} (1 - p) =$$

## Representação FK (cont)

$$= \sum_{\omega \in \Omega_n} \prod_{e: \omega_e=1} \delta_e(\sigma) \prod_{e: \omega_e=1} p \prod_{e: \omega_e=0} (1-p) = \sum_{\omega \in \Omega_n} \chi_\sigma(\omega) \mathbb{P}(\omega), \quad (15)$$

onde

$\chi_\sigma(\omega) = \mathbb{1}\{\sigma \text{ tem o mesmo sinal em cada o aglomerado de } (Q_n^+, \omega)\}$ .

$$\text{Logo, } Z'_n = \sum_{\sigma \in S_n} e^{\beta \sum_{e \in E_n^+} (\sigma_e - 1)} = \sum_{\omega \in \Omega_n} \sum_{\sigma \in S_n} \chi_\sigma(\omega) \mathbb{P}(\omega). \quad (16)$$

Recordando (14), concluímos que a soma interna em (16) vale  $2^{N'(\omega)}$ , onde  $N'(\omega)$  é o  $\#$  de aglomerados de  $(Q_n^+, \omega)$  que não tocam  $\partial^+ Q_n$ .

Note que  $N'(\omega) = N(\omega) - 1$ . Logo

Dado  $\omega \in \Omega_n$ , seja  $C_1, \dots, C_N$  uma enum dos aglos  $\neq$ 's de  $(Q_n^+, \omega)$ ,

onde  $N = N(\omega)$ , tq  $C_1$  é o aglom da fronteira. Então:



## Representação FK (cont)

$$\begin{aligned}\chi_\sigma(\omega) &= \mathbb{1}\{\sigma|_{C_1} \equiv +1\} \prod_{i=2}^N \mathbb{1}\{\sigma|_{C_i} \equiv -1 \text{ ou } \equiv +1\} \\ &= 2^{N-1} \mathbb{1}\{\sigma|_{C_1} \equiv +1\} \prod_{i=2}^N \frac{1}{2} \mathbb{1}\{\sigma|_{C_i} \equiv -1 \text{ ou } \equiv +1\} \\ &= 2^{N-1} P_\omega(\sigma),\end{aligned}\tag{17}$$

onde, dada  $\omega \in \Omega_n$  e  $C_1, \dots, C_N$ ,  $P_\omega$  é a prob em  $\mathcal{S}_n$  que atribui spin  $+1$  aos sítios de  $Q_n$  conectados à fronteira ( $\partial^+ Q_n$ ) — ie, a  $C_1 \cap Q_n$  —, e, para os sítios de cada  $C_i$ , atribui o mesmo spin  $-1$  ou  $+1$ , escolhido uniformemente ao acaso, e de forma independente para  $C_i$ s  $\neq$ 's.

Subst (17) em (15) e (16), segue de (13) que

$$\mu_n^+(\sigma) = \frac{2}{Z_n} \sum_{\omega \in \Omega_n} P_\omega(\sigma) 2^{N(\omega)-1} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega_n} P_\omega(\sigma) \frac{1}{Z_n} 2^{N(\omega)} \mathbb{P}(\omega),$$

onde  $Z_n = Z_n(p, 2)$ . Em outras palavras:

$$\mu_n^+(\sigma) = \sum_{\omega \in \Omega_n} P_\omega(\sigma) \phi_n^{p,2}(\omega).\tag{18}$$

# Magnetização

De (18), a *magnetização*

$$\langle \sigma_0 \rangle_n^+ = \mu_n^+(\sigma_0) = \sum_{\omega \in \Omega_n} P_\omega(\sigma_0) \phi_n^{p,2}(\omega).$$

Dada  $\omega \in \Omega_n$ , se 0 não estiver conectada à fronteira de  $\mathcal{Q}_n$  por um caminho aberto de  $\omega$  (ie, se  $0 \in \mathcal{C}_i$  para algum  $i = 2, \dots, N(\omega)$ ), então  $P_\omega(\sigma_0)$  é a esperança da distr unif em  $\{-1, +1\}$ , e logo  $P_\omega(\sigma_0) = 0$ .

Por outro lado, se 0 estiver conectada à fronteira (ie, se  $0 \in \mathcal{C}_1$ ), então  $P_\omega(\sigma_0) = 1$ .

Logo  $\langle \sigma_0 \rangle_n^+ = \phi_n^{p,2}(0 \leftrightarrow \partial^+ \mathcal{Q}_n)$ , e de (10):

$$\mathbb{P}_{p'}(0 \leftrightarrow \partial^+ \mathcal{Q}_n) \leq \langle \sigma_0 \rangle_n^+ \leq \mathbb{P}_p(0 \leftrightarrow \partial^+ \mathcal{Q}_n).$$

Tomando  $\lim_{n \rightarrow \infty}$ :

$$\theta(p') \stackrel{(i)}{\leq} \langle \sigma_0 \rangle^+ \stackrel{(ii)}{\leq} \theta(p), \quad (19)$$

$$\text{onde } p = 1 - e^{-2\beta} \text{ e } p' = \frac{p}{2-p} = \frac{1-e^{-2\beta}}{1+e^{-2\beta}}. \quad (20)$$

## Transição de fase

De (19) e (20) e dos resultados para percolação independente:

1) Em  $d = 1$ ,  $p < 1$  para todo  $\beta < \infty$ , e logo de (19ii)  $\langle \sigma_0 \rangle^+ = 0$ , e o modelo de Ising unidimensional é trivial.

2) Em  $d \geq 2$ ,  $p_c < 1$ :

a) se  $1 - e^{-2\beta} < p_c \Leftrightarrow \beta < \log \sqrt{\frac{1}{1-p_c}}$ , então  $\langle \sigma_0 \rangle^+ \stackrel{(19ii)}{=} 0$ ;

b) se  $\frac{1-e^{-2\beta}}{1+e^{-2\beta}} > p_c \Leftrightarrow \beta > \log \sqrt{\frac{1+p_c}{1-p_c}}$ , então  $\langle \sigma_0 \rangle^+ \stackrel{(19i)}{>} 0$ ;

logo, o modelo de Ising exibe trans de fase ã trivial em  $d \geq 2$  e

$$\log \sqrt{\frac{1}{1-p_c}} \leq \beta_c \leq \log \sqrt{\frac{1+p_c}{1-p_c}}$$

2') Em  $d = 2$ , temos cotas explícitas (pois sabemos que  $p_c = 1/2$ ):

$$\log \sqrt{2} \leq \beta_c \leq \log \sqrt{3}$$

(Sabe-se, neste caso, que  $\beta_c = \log \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ .)

3) Podemos mostrar em geral que se  $\langle \sigma_0 \rangle^+ = 0$ , então  $\mu^+ = \mu^0$ , ie, as medidas de Gibbs em vol  $\infty$  com fronteira livre e + são iguais (o que obvia/e não é caso se  $\mu^+(\sigma_0) = \langle \sigma_0 \rangle^+ > 0 = \mu^0(\sigma_0)$ ).