Ordem de magnitude da soma parcial da série harmônica

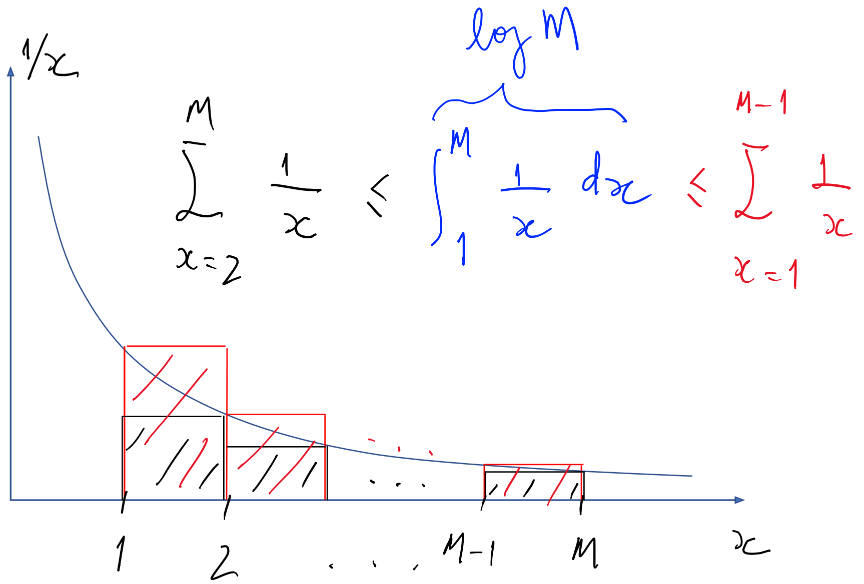

Figura 1: Relação entre somas parciais da série harmônica e o log

A figura acima ilustra o fato que

$$\log M + \frac{1}{M} \le \sum_{x=1}^{M} \frac{1}{x} \le \log M + 1.$$

(Note que o gráfico de $1/x$ fica entre os degraus pretos e vermelhos entre 1 e M.)

Logo,

$$1 + \frac{1}{M \log M} \le \frac{1}{\log M} \sum_{x=1}^{M} \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{\log M}.$$

Concluímos que

$$\frac{1}{\log M} \sum_{x=1}^{M} \frac{1}{x} \to 1$$

quando $M \to \infty$.

Usando a mesma abordagem, podemos mostrar que

$$\lim_{M\to\infty} \left\{ \sum_{x=1}^{M} \frac{1}{x} - \log M \right\}$$

existe e é finito, e define a *constante de Euler* $\gamma = 0,57721566\ldots$.