Exponenciação de matrizes

Seja $\mathcal{S}$ um conjunto enumerável não vazio, e seja $\mathbf{A} = (A_{xy},\ x, y \in \mathcal{S})$ uma matriz real em $\mathcal{S}$ (i.e., $A_{xy} \in \mathbb{R},\ x, y \in \mathcal{S}$).

A *exponencial* de $\mathbf{A}$ é a expressão

$$e^{\mathbf{A}} := \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n \tag{1}$$

sempre que o lado direito estiver bem definido e for finito, o que sempre acontece quando $\mathcal{S}$ é finito, mas também pode ocorrer com $\mathcal{S}$ infinito, a depender de $\mathbf{A}$. Nesse caso, podemos dizer que $\mathbf{A}$ *é exponenciável.*

Note que $e^{\mathbf{A}}$ é uma matriz em $\mathcal{S}$ com entradas

$$e^{\mathbf{A}}_{xy} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n_{xy},\ x, y \in \mathcal{S} \tag{2}$$

(supondo todas as expressões bem definidas e finitas).

Pode-se checar sem grande dificuldade que se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ forem duas matrizes exponenciáveis em $\mathcal{S}$, e se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ comutarem (isto é, se $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$), então

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}. \tag{3}$$

Se $\mathbf{A}$ for diagonalizável, i.e., se houver matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{U}$ em $\mathcal{S}$, com $\mathbf{D}$ diagonal e $\mathbf{U}$ inversível, tais que $\mathbf{A} = \mathbf{UDU}^{-1}$, então $\mathbf{A}$ é exponenciável e

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{U} e^{\mathbf{D}} \mathbf{U}^{-1}, \tag{4}$$

onde $e^{\mathbf{D}}$ é uma matriz diagonal, cujas entradas diagonais são as exponenciais das entradas diagonais de $\mathbf{D}$ respectivas.