

Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Distribuições invariantes

Def. Dadas uma medida λ e uma Q -matriz \mathbf{Q} em \mathcal{S} , dizemos que λ é invariante para \mathbf{Q} se $\lambda\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Teorema 1

Seja \mathbf{Q} uma Q -matriz e $\mathbf{\Pi}$ a matriz de saltos resp. São equivalentes:

- (i) λ é invariante para \mathbf{Q} ;
- (ii) $\mu\mathbf{\Pi} = \mu$, onde $\mu_x \equiv \lambda_x q_x$ (μ é invariante para $\mathbf{\Pi}$).

Dem. Note que $q_x(\pi_{xy} - \delta_{xy}) = q_{xy} \forall x, y \in \mathcal{S}$. Logo, $\forall y \in \mathcal{S}$

$$(\mu(\mathbf{\Pi} - \mathbf{I}))_y = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu_x(\pi_{xy} - \delta_{xy}) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \lambda_x q_{xy} = (\lambda\mathbf{Q})_y,$$

e concluímos que $\mu\mathbf{\Pi} - \mu = \lambda\mathbf{Q}$. □

Distribuições invariantes (cont)

Podemos usar os resultados de tempo discreto para o caso de tempo contínuo.

Teorema 2

Suponha que \mathbf{Q} seja uma Q -matriz irredutível e recorrente. Então \mathbf{Q} tem uma medida invariante, que é única a menos de múltiplos escalares.

Dem. Excluindo o caso trivial em que \mathcal{S} é unitário, a irredutibili// obriga a que $q_x > 0 \forall x$. Pelos resultados acima, $\mathbf{\Pi}$ é irred e recorr. Pelos resultados em tempo discreto, $\mathbf{\Pi}$ tem uma única med inv a menos de mults escs. Pelo Teo 1, podemos tomar $\lambda_x = \mu_x/q_x$. \square

Recorrência positiva

Lembremos que x é dito recorrente se $q_x = 0$ ou $\mathbb{P}_x(\mathcal{T}_x < \infty) = 1$.

Se $q_x = 0$ ou $m_x := \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x) < \infty$, então dizemos que x é *recorrente positivo*.

Se x for recorrente, mas não recorrente positivo, então dizemos que é *recorrente nulo*.

Teorema 3

Seja \mathbf{Q} seja uma Q -matriz irredutível. São equivalentes:

- (i) Todo estado $x \in \mathcal{S}$ é recorrente positivo;
- (ii) Algum estado $x \in \mathcal{S}$ é recorrente positivo;
- (iii) \mathbf{Q} é não explosiva e tem uma distribuição invariante λ .

Além disto, qdo (iii) valer, temos $\lambda_x = \frac{1}{q_x m_x}$.

Dem. Teo 3

Excluindo o caso trivial em que \mathcal{S} é unitário, a irreduzibili// obriga a que $q_x > 0 \forall x$.

(i \Rightarrow ii) é óbvio.

Seja, para $x \in \mathcal{S}$, $\mu^x = (\mu_y^x, y \in \mathcal{S})$, onde

$$\mu_y^x = \int_0^{\mathcal{T}_x \wedge \zeta} \mathbb{1}\{X_s = y\} ds.$$

Fubini: $\sum_{y \in \mathcal{S}} \mu_y^x = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x \wedge \zeta)$.

Seja N_x a 1ra passagem de (Y_n) , a cadeia de saltos associada a \mathbf{Q} , por x . Então,

$$\begin{aligned} \mu_y^x &= \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} T_{n+1} \mathbb{1}\{Y_n = y, n < N_x\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}_x(T_{n+1} | Y_n = y) \mathbb{P}_x(Y_n = y, n < N_x) \\ &= \frac{1}{q_x} \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}\{Y_n = y, n < N_x\} = \frac{1}{q_x} \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{N_x-1} \mathbb{1}\{Y_n = y\} = \frac{\gamma_y^x}{q_x}, \end{aligned}$$

usando a notação do caso discreto.

Dem. Teo 3 (cont)

(ii \Rightarrow iii)

(ii) $\Rightarrow x$ é recorrente, logo (Y_n) é recorrente e \mathbf{Q} é não explosiva pelo Teo 2 do cj de slides sobre PMS (Teo 2.7.1 do livro).

Sabemos do caso discreto (Teo 1 do 3ro cj de slides sobre CM's em tempo discreto; Teo 1.7.5. do livro) que γ^x é inv $p/\mathbf{\Pi}$; logo $\mu^x \mathbf{Q} = 0$ pelo Teo 1 acima.

Como μ^x é finita:

$$\sum_{y \in \mathcal{S}} \mu_y^x = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x \wedge \zeta) = \mathbb{E}_x(\mathcal{T}_x) = m_x < \infty,$$

e temos uma distr inv: $\lambda_y = \mu_y^x / m_y$, $y \in \mathcal{S}$, e temos (iii).

Dem. Teo 3 (cont)

(iii \Rightarrow i)

Supondo agora a validade de (iii), fixemos $x \in \mathcal{S}$ tq $\lambda_x > 0$ e façamos $\nu_y^x = \frac{\lambda_y q_y}{\lambda_x q_x}$. Então $\nu_x = 1$, e $\nu \mathbf{\Pi} = \nu$, pelo Teo 1.

Logo, pelo Teo 2 do 3ro cj de slides sobre CM's em tempo discreto (Teo 1.7.6. do livro): $\nu_y^x \geq \gamma_y^x > 0$, $y \in \mathcal{S}$; segue que $\lambda_x > 0$, $x \in \mathcal{S}$, e logo

$$m_x^* \doteq \sum_{y \in \mathcal{S}} \mu_y^x = \sum_{y \in \mathcal{S}} \frac{\gamma_y^x}{q_y} \leq \sum_{y \in \mathcal{S}} \frac{\nu_y}{q_y} = \sum_{y \in \mathcal{S}} \frac{\lambda_y}{\lambda_x q_x} = \frac{1}{\lambda_x q_x} < \infty,$$

e x é rec pos, $x \in \mathcal{S}$, e temos (i).

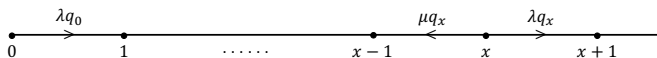
Voltando ao cálculo anterior, sabendo agora que \mathbf{Q} é recorrente, temos que $\mathbf{\Pi}$ é recorrente (Teo 3 do cj de slides anterior), e do Teo 2 do 3ro cj de slides sobre CM's em tempo discreto (Teo 1.7.6. do livro), segue que

$$\nu_y = \gamma_y^x, \quad y \in \mathcal{S}, \quad \text{e} \quad \lambda_x = \frac{1}{q_x m_x}.$$

□

*Aqui usamos a hipótese de não explosividade.

Contra exemplo



$q_x > 0 \forall x \geq 0$, $\mu = 1 - \lambda \in (0, 1)$: irreduzível//.

Cadeia de saltos: PAS; rec pos $\Leftrightarrow \mu > \lambda$.

Das eqs de eq detalhado[†]:

$\nu_x = \frac{1}{q_x} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^x$... medida finita em \mathbb{N} qdo p.ex. $1 < \frac{\lambda}{\mu} < 2$ e $q_x = 2^x$.

Note que, neste último caso, a cadeia de saltos, e logo o PMS, são transitórios. A única explicação é que \mathbf{Q} é explosiva neste caso.

[†]que fornecem uma med inv neste caso, como veremos adiante

Teorema 4

Suponha que \mathbf{Q} seja uma Q -matriz irredutível e recorrente em \mathcal{S} , e seja λ uma medida em \mathcal{S} . São equivalentes:

- (i) $\lambda\mathbf{Q} = 0$;
- (ii) $\lambda\mathbf{P}(s) = \lambda \forall s \geq 0$.

Dem. Como \mathbf{Q} é recorrente, então, pelo Teo 2 do cj de slides sobre PMS (Teo 2.7.1 do livro), \mathbf{Q} é não explosiva., e $\mathbf{P}(s)$ é recorrente pelo Teo 3 do cj de slides anterior.

Logo, λ satisfazendo (i) ou (ii) é única a menos de cte mult. Da prova do Teo 3 acima, temos que, fixado x , se fizermos

$$\mu_y = \mathbb{E}_x \left(\int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_t = y\} dt \right), \text{ então } \mu\mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Basta então mostrar que $\mu\mathbf{P}(s) = \mu$.

Dem. Teo 4 (cont)

Pela PFM (que neste caso segue prontamente da PFM para a cadeia de saltos):

$$\mathbb{E}_x \int_0^s \mathbb{1}\{X_t = y\} dt = \mathbb{E}_x \int_{\mathcal{T}_x}^{\mathcal{T}_x+s} \mathbb{1}\{X_t = y\} dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mu_y &= \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_t = y\} dt = \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x+s} \dots - \mathbb{E}_x \int_{\mathcal{T}_x}^{\mathcal{T}_x+s} \dots \\ &= \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x+s} \dots - \mathbb{E}_x \int_0^s \dots = \mathbb{E}_x \int_s^{\mathcal{T}_x+s} \mathbb{1}\{X_t = y\} dt \\ &= \mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_{t+s} = y\} dt = \mathbb{E}_x \int_0^\infty \mathbb{1}\{X_{t+s} = y, t < \mathcal{T}_x\} dt \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}_x(X_{t+s} = y, t < \mathcal{T}_x) dt \stackrel{PM}{=} \sum_{z \in \mathcal{S}} \int_0^\infty \mathbb{P}_x(X_t = z, t < \mathcal{T}_x) P_{zy}(s) dt \\ &= \sum_{z \in \mathcal{S}} \left(\mathbb{E}_x \int_0^{\mathcal{T}_x} \mathbb{1}\{X_t = z\} dt \right) P_{zy}(s) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \mu_z P_{zy}(s). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 5

Seja \mathbf{Q} uma Q -matriz irredutível e não explosiva admitindo uma distr inv λ . Se (X_t) form um PMS(λ, \mathbf{Q}), então $(X_{t+s})_{t \geq 0}$ tb é um PMS(λ, \mathbf{Q}) para todo $s \geq 0$.

Dem. Pelo Teo 4, para todo $x \in \mathcal{S}$, $\mathbb{P}(X_s = x) = (\lambda \mathbf{P}(s))_x = \lambda_x$.

Pela PM, dado $X_s = x$, $(X_{s+t})_{t \geq 0}$ é um PMS(δ_x, \mathbf{Q}), indep de $(X_r)_{0 \leq r \leq s}$. Logo, dados $0 < t_1 < \dots < t_n$ e $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(X_{t_n+s} = x_n, \dots, X_{t_1+s} = x_1) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_s = x) \mathbb{P}(X_{t_n+s} = x_n, \dots, X_{t_1+s} = x_1 | X_s = x) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{S}} \lambda_x \mathbb{P}_x(X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1) \\ &= \mathbb{P}(X_{t_n} = x_n, \dots, X_{t_1} = x_1). \end{aligned}$$

□

Convergência ao equilíbrio

Lema 1

Seja \mathbf{Q} uma Q -matriz e $(\mathbf{P}(t))$ o semigrupo associado (dado pela slç mínima da eq. atrasada). Então para todo $t, h \geq 0$

$$|P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)| \leq 1 - e^{-q_x h}.$$

Dem.

$$\begin{aligned} & |P_{xy}(t+h) - P_{xy}(t)| \\ = & \left| \sum_{z \in \mathcal{S}} P_{xz}(h)P_{zy}(t) - P_{xy}(t) \right| \\ = & \left| \sum_{z \neq x} P_{xz}(h)P_{zy}(t) - (1 - P_{xx}(h))P_{xy}(t) \right| \\ \leq & 1 - P_{xx}(h) \leq \mathbb{P}_x(T_1 \leq h) = 1 - e^{-q_x h} \end{aligned}$$

□

Teorema 6 (Convergência ao equilíbrio)

Seja \mathbf{Q} uma Q -matriz irredutível, invariante e não explosiva com semigrupo $(\mathbf{P}(t))$ e distr inv λ . Então para todo $x, y \in \mathcal{S}$

$$P_{xy}(t) \rightarrow \lambda_y \text{ qdo } t \rightarrow \infty.$$

Dem. Seja $(X_t) \sim \text{PMS}(\delta_x, \mathbf{Q})$. Para $h > 0$ fixado, seja $(Z_n)_{n \geq 0} = (X_{nh})_{n \geq 0}$.

Pelo Teo 4 do cj de slides sobre as Eqs de Kolmogorov (Teo 2.8.4 do livro), temos que $(Z_n) \sim \text{CM}(\delta_x, \mathbf{P}(h))$.

Pelo Teo 1 do cj de slides anterior (Teo 3.2.1 do livro) e irredutibili// implicam que $P_{xy}(h) > 0 \forall x, y$.

Logo, $\mathbf{P}(h)$ é irredutível e aperiódica; logo, pelo Teo 4, λ é inv para $\mathbf{P}(h)$, e pelo teo de conv para CM's em tempo discreto:

$$P_{xy}(nh) \rightarrow \lambda_y \text{ qdo } n \rightarrow \infty.$$

Dem. Teo 6 (cont)

Dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher $h > 0$ tq

$$1 - e^{-q_x s} \leq \varepsilon/2 \quad \forall 0 \leq s \leq h \quad (1)$$

e então escolher N tq

$$|P_{xy}(nh) - \lambda_y| \leq \varepsilon/2 \quad \forall n \geq N. \quad (2)$$

Para $t \geq Nh$ e $n \geq N$ tq $nh \leq t < (n+1)h$, temos

$$|P_{xy}(t) - \lambda_y| \leq |P_{xy}(t) - P_{xy}(nh)| + |P_{xy}(nh) - \lambda_y| \leq \varepsilon,$$

pelo Lema 1, (1) e (2). □

Teorema 7

Seja \mathbf{Q} uma Q -matriz irredutível e ν uma distr qqer em \mathcal{S} .[‡]

Suponha que $(X_t) \sim \text{PMS}(\nu, \mathbf{Q})$. Então

$$\mathbb{P}(X_t = y) \rightarrow \frac{1}{q_y m_y} \text{ qdo } t \rightarrow \infty \forall y \in \mathcal{S},$$

onde $m_y = \mathbb{E}_y(\mathcal{T}_y)$.

Dem. Segue do caso discreto, usando o mesmo argumento do Teo 6 (e que \mathbf{Q} rec nula $\Rightarrow \mathbf{P}(s)$ rec nula; caso transitório é simples). □

[‡]Para evitar um caso trivial, e diferente, supomos $|\mathcal{S}| \geq 2$.