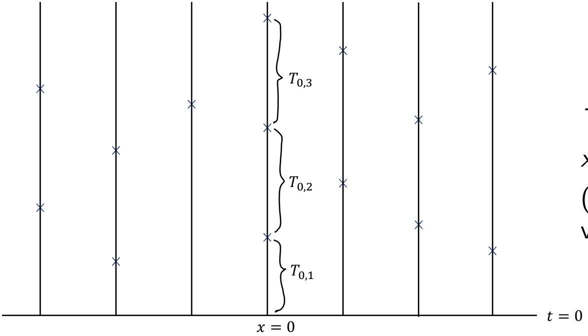
Sistemas Complexos

Luiz Renato Fontes

Processo de contato

Sistema de partículas: inicialmente, $\eta_0 \in \Omega = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^d}$: estado de saúde de indivíduos postados em $\mathbb{Z}^d$ (0 = saudável; 1 = infectado).

Cada indivíduo é equipado de um alarme. No desenrolar do tempo (contínuo) a partir do instante inicial ($t = 0$), cada alarme de cada indivíduo soa, independentemente dos demais, a taxa 1 (i.e., a intervalos iid com distribuição exponencial para cada indivíduo).



$T_{x,i} \sim \text{Exp}(1)$ iid,
$x \in \mathbb{Z}^d$, $i = 1, 2, \ldots$
(como no modelo do votante)

Processo de contato (cont)

Cada vez que o alarme toca para o indivíduo em $x \in \mathbb{Z}^d$, se ele estiver saudável imediatamente antes daquele momento, então assim ele continua; se, ao contrário, ele estiver infectado imediatamente antes do toque, então ele se torna saudável a partir daquele momento (até eventual e possivelmente ser reinfectado, pelo mecanismo de infecção a ser descrito a seguir). Este é o mecanismo de cura.

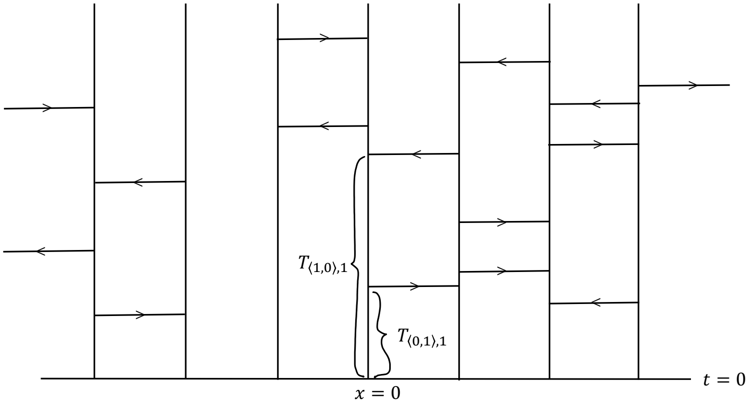
Há um mecanismo de infecção. Cada elo *orientado* de

$$\vec{\mathcal{E}}^d = \{\vec{e} = \langle x, y\rangle : x, y \in \mathbb{Z}^d \text{ e } \|x - y\|_1 = 1\}$$

tem igualmente um alarme que toca, neste caso a taxa $\lambda > 0$, independentemente dos outros alarmes de elos ou sítios.

A cada toque do alarme do elo $\langle x, y\rangle$, digamos no tempo t^*, diremos que $\langle x, y\rangle(t^*)$ é um *elo de infecção*, e, se, imediatamente antes de t^*, x estiver infectado e y estiver saudável, então a infecção será transmitida em t^* de x para y, que se torna infectado a partir de t^* (até eventualmente se curar, pelo mecanismo de cura); do contrário, nada ocorre.

Processo de contato (cont)



Elos de infecção; $T_{\vec{e},i}$; $\vec{e} \in \vec{\mathcal{E}}^d$, $i \geq 1$, iid $\mathrm{Exp}(\lambda)$

Processo de contato (cont)

Dada uma configuração inicial $\eta_0 \in \Omega$, seja η_t a configuração do processo no tempo $t \geq 0$.

Como obter η_t a partir de η_0?

Dados $x, y \in \mathbb{Z}^d$ e $0 \leq s < t$, um *caminho (de infecção)* ligando (x, s) a (y, t) é qualquer sequência

$(x_0, r_0), (x_0, r_1), (x_1, r_1), \ldots, (x_{n-1}, r_{n-1}), (x_n, r_{n-1}), (x_n, r_n)$,

onde $n \geq 1$, $x_0 = x, x_n = y$, e

$\langle x_{i-1}, x_i \rangle \in \mathcal{E}^d$, $i = 1, \ldots, n$; $s = r_0 \leq r_1 < \cdots < r_{n-1} \leq r_n = t$,

com a propriedade de que $\langle x_{i-1}, x_i \rangle (r_i)$ é um elo (de infecção) para $i = 1, \ldots, n$ e nenhum intervalo $[r_{i-1}, r_i]$, $i = 1, \ldots, n$, contém qualquer marca de cura.

Note que se (x, s) a (y, t) estiverem ligados por um caminho e $\eta_s(x) = 1$, então $\eta_t(y) = 1$.

Processo de contato (cont)

Logo, dado $\eta_0 \in \Omega$, seja $A = \{x \in \mathbb{Z}^d : \eta_0(x) = 1\}$, e dado $y \in \mathbb{Z}^d$, temos que

$$\eta_t(y) = \mathbb{1}\{\text{existe um caminho entre } (x,0) \text{ a } (y,t) \text{ para algum } x \in A\}.$$

Obs. 1) Note que podemos ver os caminhos evoluindo no sentido temporal positivo ou negativo (do tempo s ao tempo t, ou reversamente; no caso reverso, as setas são seguidas no sentido reverso).

2) Em ambos sentidos, podemos comparar o conjunto de caminhos a partir do ponto espaço-temporal (z, r) com o cj de caminhos de um processo de ramificação auxiliar, descrito a seguir no sentido temporal positivo (o caso negativo é similar):

O processo de ramificação se inicia com um indivíduo (recém nascido) em (z, r); este indivíduo sobrevive até o primeiro toque do alarme de z após r, digamos no tempo $r^* > r$; seus (eventuais) descendentes (imediatos) são as extremidades (z', r'), $r < r' < r^*$, correspondentes a elos (de infecção) $\langle z, z' \rangle(r')$ ocorrendo entre os tempos r e r^*; r' é o instante de nascimento do descendente em (z', r').

Obs. 2 (cont)

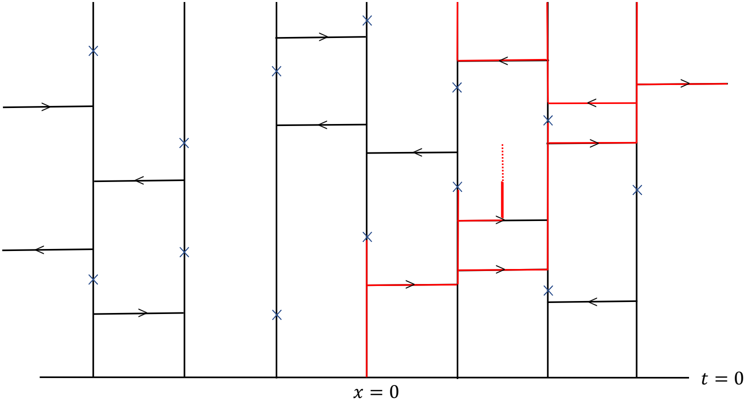
Para darmos continuidade à descrição da *família* iniciada em (z, r), de forma a termos o quadro do processo de ramificação, estipulamos uma linha de tempo própria para cada (eventual) descendente (z', r') a partir do tempo r', com marcas de cura e elos de infecção acedentes * próprios, com a mesma distribuição do que para o processo de contato, mas, diferentemente daquele processo, *independentes* das marcas e elos das demais linhas de tempo dos outros membros da família. (Veja a construção do processo auxiliar para o modelo SIR no próximo tópico do curso, com descrição com sorte mais detalhada.)

Podemos acoplar o processo de contato e o processo auxiliar de forma que todos os caminhos do processo de contato a partir de (z, r) estejam contidos no conjunto de caminhos a partir de (z, r) do processo auxiliar.

---

*Um elo de infecção $\langle x, y\rangle(\cdot)$ é dito *acedente* à linha de tempo de x, e *incidente* à linha de tempo de y.

Acoplamento



Caminhos do processo de ramificação a partir de $(0, 0)$, acoplados aos do processo de contato.

Processo auxiliar

Notemos agora que o número de caminhos distintos do processo auxiliar começando em (x, s) e chegando até o tempo t [†], digamos N_t é um processo de nascimento e morte em $\mathbb{N}$, com taxa de nascimento em n igual a $2d\lambda n$ e taxa de morte igual a n.

Este processo é não explosivo (basta comparar com o caso igualmente não explosivo do mesmo processo sem mortes), logo temos para cada $y \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$, apenas um número finito de caminhos de cada (y, t) chegando até o tempo 0 (em sentido temporal reverso), e logo o mesmo vale para o processo de contato.

Usando o acoplamento, temos que N_t domina $N'_t = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \eta_t(y) \; \forall \; t > s$ (sob a cond $\eta_s(y) = \delta_{xy}$). A não explosividade de $(N_t)_{t>s}$ implica então na não explosividade de $(N_t)_{t>s}$.

Segue que $(\eta_t, \, t \geq 0)$, da mesma forma que para o modelo do votante, está bem definido quase certamente, e é um processo de Markov em Ω. Às vezes escreveremos $\eta_t^{\eta_0}$ para enfatizar a dependência na condição inicial.

[†] Digamos no sentido temporal positivo, em que $s < t$; mas argumento similar funciona em sentido negativo/reverso.

Dualidade

Como a distribuição das marcas de cura e setas é invariante por reversão no tempo (acompanhada de reversão no sentido das setas, como indicado na Obs 1, Slide 6), temos a seguinte *relação de dualidade*: vamos denotar por Ψ_t o conjunto de sítios infectados no tempo t, ie, $\Psi_t^A = \{x \in \mathbb{Z}^d : \eta_t(x) = 1\}$, onde A indica o cj de sítios infectados no tempo inicial; do ponto acima e e da Obs 1, Slide 6, segue que

$$\mathbb{P}(\Psi_t^A \cap B \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\Psi_t^B \cap A \neq \emptyset) \qquad (*),$$

$A, B \subset \mathbb{Z}^d$.

Monotonicidade

Há três tipos de monotonicidade no processo de contato a serem observadas neste ponto.

1) Dadas $\eta, \zeta \in \Omega$ tais que $\eta \leq \zeta$ (na ordem parcial já apresentada), então segue da construção do processo de contato acima que $\eta_t \leq \zeta_t$ para cada $t \geq 0$.

2) Podemos acoplar processos de contato, digamos η e η', com taxas de infecção diferentes, digamos $\lambda < \lambda'$, respectivamente, começando da mesma configuração inicial — i.e., $\eta_0 = \eta'_0$ —, de tal forma que as marcas de cura de η e η' são as mesmas, e o cj de elos de infecção de η está contido no de η'; de forma que, finalmente, $\eta_t \leq \eta'_t$ para todo $t \geq 0$.

3) Como no caso do modelo de percolação podemos acoplar processos de contato, digamos η e η', com a mesma taxa de infecção, mas em dimensões diferentes, digamos $d < d'$, respectivamente, com a mesma conf inicial nas primeiras d coordenadas, tq $\eta_t(x) \leq \eta'(x')\ \forall\ x' \in \mathbb{Z}^{d'}$ e $t \geq 0$, onde $x = (x'_1, \ldots, x'_d)$.

Sobrevivência da infecção

Uma questão básica sobre o comportamento assintótico no tempo do processo de contato é sobre a sobrevivência indefinida de infecção inicial.

Obs. 1) Note que, claramente, se $\eta_0 \equiv 0$, então $\eta_t \equiv 0 \; \forall \; t \geq 0$.

2) Se $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta_0(x) = \infty$, então qc $\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta_t(x) = \infty \; \forall \; t \geq 0$.

Logo a questão da sobrevivência (indefinida) de infecção inicial só é não trivial se $0 < \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta_0(x) < \infty$.

Vamos a seguir tomar $\eta_0 = \delta_{\mathbf{0}}$ (i.e., inicialmente a origem e somente a origem está infectada).

Seja $\vec{\theta} = \vec{\theta}(\lambda) = \vec{\theta}(\lambda, d) = \mathbb{P}\big(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta_t(x) > 0 \, \forall \, t \geq 0 \big| \eta_0 = \delta_{\mathbf{0}} \big)$.

Das ppddes de monotonicidade 2 e 3 apresentadas no slide anterior segue que $\vec{\theta}$ é não decrescente em λ e d.

Transição de fase

Seja $\lambda_c = \lambda_c(d) = \sup\{\lambda \geq 0 : \vec{\theta} = 0\}$.

Teorema 1

Para todo $d \geq 1$, temos que $\lambda_c \in (0, \infty)$.

O Teo 1 segue imediatamente das seguintes proposições.

Proposição 1

Se $\lambda \leq \frac{1}{2d}$, então $\vec{\theta} = 0$.

Proposição 2

Existe $\lambda_0 < \infty$ tal que, se $\lambda > \lambda_0$, então $\vec{\theta}(\lambda, 1) > 0$.

Dem. Prop 1

Basta argumentar, por comparação com o processo auxiliar, como já fizemos acima, que se $\lambda \leq \frac{1}{2d}$, então o processo de nascimento e morte N_t, com $N_0 = 1$, visita a origem qc.

Como vimos acima (no Slide 9), N_t é um PNM, e podemos verificar que cadeia de saltos é um passeio aleatório simples em $\mathbb{N}$ com absorção na origem e prob de transição de n a $n+1$ igual a $\frac{2d\lambda}{1+2d\lambda}$.

Segue que qdo $\lambda \leq \frac{1}{2d}$, a prob de absorção na origem de N_t, e logo do correspodente N'_t, é 1.

$\square$

Percolação orientada 1-dependente em 2 dimensões

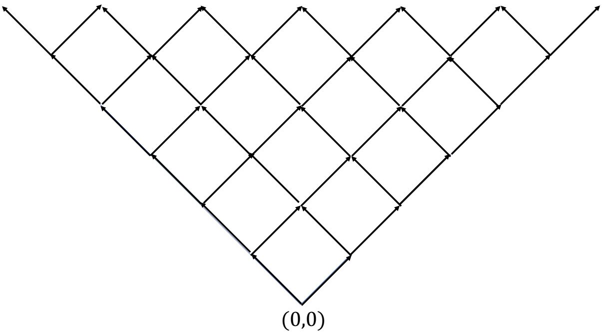
O argumento para a Proposição 2 consistirá numa comparação com um modelo de percolação de elos como se segue.

Para $n \geq 0$, sejam $W_n = \{(\ell, n) \in \mathbb{Z}^2 : \ell + n = \text{par e } -n \leq \ell \leq n\}$,

$\mathbb{W} = \cup_{n \geq 0} W_n$, e $\mathbb{L} = (\mathbb{W}, \vec{\mathcal{E}})$ o grafo com cj de sítios $\mathbb{W}$ e cj de elos

$\vec{\mathcal{E}} = \{\langle x, y \rangle : x = (\ell, n) \in W_n \text{ para algum } n \geq 0 \text{ e } y = (\ell \pm 1, n+1)\}$,

onde $\langle x, y \rangle$ é um elo orientado (de x a y).



Percolação orientada (cont)

Seja $\Omega' = \{0,1\}^{\vec{\mathcal{E}}}$. Dada $\mathcal{W} \in \Omega'$, diremos que o elo $\vec{e}$ está aberto (em ω), se $\omega_{\vec{e}} = 1$, e $\vec{e}$ está fechado, se $\omega_{\vec{e}} = 0$.

Para $x, y \in \mathbb{W}$, dizemos que x e y estão conectados (em $\omega \in \Omega'$) se $x = y$ ou se houver um caminho orientado de elos abertos ligando x a y: isto é, supondo que $y_2 > x_2$, existe $n \geq 1$ e $x = z_0, z_1, \ldots, z_n = y$ tq $\langle z_{i-1}, z_i \rangle \in \vec{\mathcal{E}}$ está aberto, $i = 1, \ldots, n$.

Seja $\vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{C}}(\omega) = \{y \in \mathbb{W} :\ y \text{ está conectado a } \mathbf{0}\}$.

Seja agora $\mathbb{P}$ uma probabilidade em Ω' com a ppdde de que para cada $\vec{e} = \langle x, y \rangle \in \vec{\mathcal{E}}$, temos que $\mathbb{P}(\omega_{\vec{e}} = 1) = p$, e, sob $\mathbb{P}$, $\omega_{\vec{e}}$ é indep de $\{\omega_{\langle x', y' \rangle} :\ x \neq x' \text{ e } y \neq y'\}$, onde $\omega_{\vec{e}}$ é o valor em $\vec{e}$ de $\omega \in \Omega'$.

Tal modelo probabilístico será dito um *modelo de percolação orientada 1-dependente*. Seja $\hat{\theta} = \mathbb{P}(|\vec{\mathcal{C}}| = \infty)$.

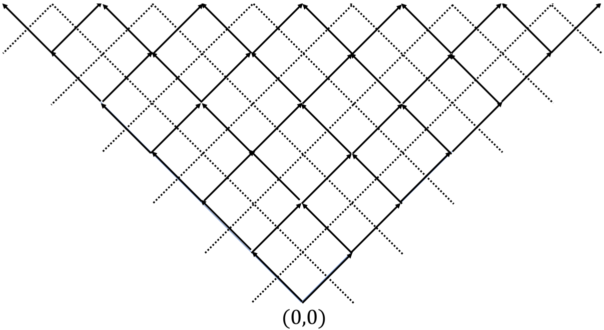
Lema 1

Para $\mathbb{P}$ como acima, existe $p_0 < 1$ tq, se $p > p_0$, então $\hat{\theta} > 0$.

Dualidade

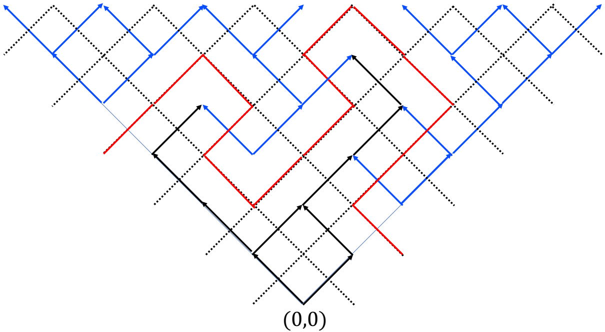
O argumento para provar o Lema 1 é semelhante àquele para o Lema 2 dos slides sobre o modelo de percolação de elos independentes em $\mathbb{Z}^d$ (que trata do caso bidimensional, como agora). Começamos com considerações geométricas.

Seja $\mathbb{L}^*$ o grafo dual de $\mathbb{L}^*$, formado pelos elos secantes a elos de $\vec{\mathcal{E}}$: para cada $\vec{e} \in \vec{\mathcal{E}}$, seja e^* o elo (não orientado) ortogonal e secante a $\vec{e}$ no ponto médio de $\vec{e}$ e de mesmo comprimento de $\vec{e}$, e façamos $\mathcal{E}^* = \{e^* : \vec{e} \in \vec{\mathcal{E}}\}$; e seja $\mathbb{W}^*$ o cj de extremidades de elos de $\mathcal{E}^*$. $\mathbb{L}^* = (\mathbb{W}^*, \mathcal{E}^*)$.



Fato geométrico

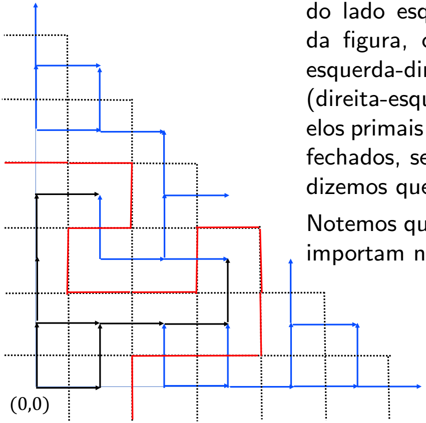
Se, para dada $\omega \in \Omega'$, $|\vec{\mathcal{C}}(\omega)| < \infty$, então existe um caminho *auto evitante* em $\mathbb{L}^*$ a partir de um ponto do lado esquerdo de $\mathbb{W}^*$ até um ponto do lado direito, como ilustrado a seguir.



Os elos pretos (abertos) e ausentes (fechados) determinam $\vec{\mathcal{C}}$; os elos azuis são irrelevantes nesta determinação.

Para prosseguir, é conveniente girar o espaço por -45°:

Fato geométrico (cont)



O caminho autoevitante (em vermelho), começando do lado esquerdo, e terminando do lado de baixo da figura, cruza elos primais fechados no sentido esquerda-direita e para baixo; nos outros sentidos (direita-esquerda e para cima) não há restrição (os elos primais correspondentes podem estar abertos ou fechados, sem qualquer consequência). Neste caso, dizemos que tal caminho *circunscreve a origem*.

Notemos que os estados dos elos azuis da figura não importam na determinação de $\vec{\mathcal{C}}$.

Vamos a seguir argumentar a validade do fato geométrico.

Fato geométrico (dem.)

Voltando ao espaço original (desfazendo a rotação), vamos argumentar o fato geométrico por indução sobre a *altura* de $\vec{\mathcal{C}}$, i.e., $\mathcal{H} := \max\{x_2 \geq 0 : \ x = (x_1, x_2) \in \vec{\mathcal{C}}\}$.

O fato é óbvio para $\mathcal{H} = 0$. Supondo que seja válido para $\mathcal{H} = n \geq 0$ e tomemos $\omega \in \Omega'$ tq $\mathcal{H} = n + 1$. Vamos supor que ambos os elos primais a partir de $(0, 0)$ estejam abertos, do contrário o argumento é similar, e deixado como exercício para o leitor.

Sejam $\vec{\mathcal{C}_1}$ e $\vec{\mathcal{C}_2}$ os aglomerados de $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ respectivamente. Então, temos que $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, as alturas respectivas, são ambas $\leq n$ e logo a hipótese de indução vale para $\vec{\mathcal{C}_1}$ e $\vec{\mathcal{C}_2}$. Há cruzamentos esquerda-direita dos respectivos $\mathbb{W}_1^*$ e $\mathbb{W}_2^*$, digamos γ_1 e γ_2, resp.

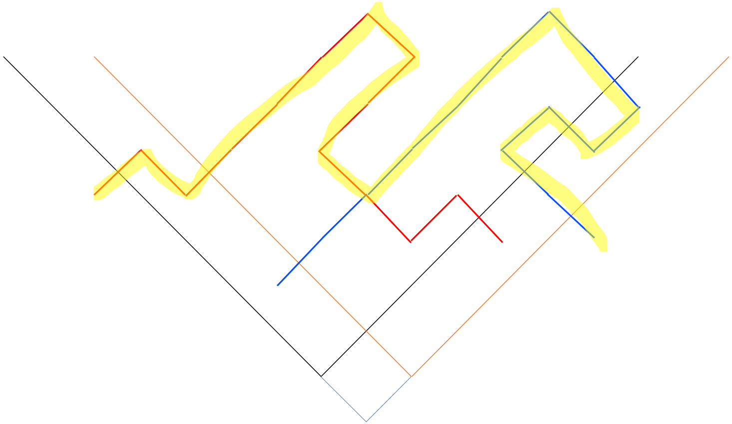
Se γ_1 e γ_2 se cruzarem, então a caminho γ_3 igual a γ_1 até o (primeiro) ponto de cruzamento, e depois igual a γ_2 tem as ppddes procuradas.

Dem. do fato geométrico (cont)

Se γ_1 e γ_2 não se cruzarem, então um fica por cima do outro; digamos que γ_1 fica por cima; o outro caso é semelhante.

Note então que do ponto de saída à direita de γ_1 até a primeira extremidade do último elo de γ_2 (na ordem com que o caminho é percorrido, da esquerda para a direita), há um caminho, digamos γ', da direita para a esquerda na figura girada. Neste caso, γ_3 igual a γ_1 até o encontro com γ', depois igual a γ' até o encontro com o último elo de γ_2, e depois igual a este elo, tem as ppddes procuradas. $\square$

Ilustração do argumento acima



Dem. do Lema 1

Cada caminho auto evitante como acima (na figura girada), tem ao menos tantos elos percorridos para baixo quanto elos percorridos para cima, e ao menos tantos elos percorridos da esquerda para a direita quanto elos percorridos da direita para esquerda. Então num tal caminho, γ, com com n elos, temos ao menos $\frac{n}{2}$ percorridos para baixo ou da esquerda para a direita; vamos enumerar estes elos de γ $e_1, \dots, e_k$, na ordem que são percorridos, começando à esquerda de $\widehat{\mathbb{W}}^*$, $k \geq \frac{n}{2}$.

Agora notemos que os elos primais correspondentes a $e_1, e_2, \dots, e_k$, a saber, $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k$, resp., estão todos fechados. Além disto, de $\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_5, \dots, \vec{e}_\ell$, nenhum par de elos têm qualquer extremidade em comum, onde ℓ é o maior ímpar menos ou igual a k. Logo $\omega_{\vec{e}_1}, \dots, \omega_{\vec{e}_\ell}$ são independentes sob $\mathbb{P}$.

Logo a probabilidade de γ circunscrever a origem é cotada por cima por $(1-p)^\ell \leq (1-p)^{\frac{n}{4}}$.

Dem. do Lema 1 (cont.)

Seja Λ_n^* o conjunto de caminhos de $\mathbb{L}^*$ com n elos que circunscrevem a origem. Temos que

$$\mathbb{P}(|\vec{\mathcal{C}}| < \infty) \leq \sum_{n\geq 2} \sum_{\gamma \in \Lambda_n^*} \mathbb{P}(\gamma \text{ circunscreve a origem})$$
$$\leq \sum_{n\geq 2} (1-p)^{\frac{n}{4}} |\Lambda_n^*|.$$

Como $\gamma \in \Lambda_n^*$ precisam no lado esquerdo de $\mathbb{W}^*$ e terminar do lado direito, e ter comprimento n, então há no máximo $n-1$ possibilidades para o ponto inicial de γ, e subsequentemente no máximo 3 possibidades para cada passo de γ. Logo, $|\Lambda_n^*| \leq (n-1)3^{n-1}$, e concluímos que

$$\mathbb{P}(|\vec{\mathcal{C}}| < \infty) \leq q \sum_{n\geq 1} n(3q)^n =: \phi(p), \text{ onde } q = (1-p)^{\frac{1}{4}}.$$

Como ϕ é contínua, decrescente em $\left(\frac{2}{3}, 1\right]$, e $\phi(1) = 0$, temos que existe $p_0 < 1$ tq, se $p > p_0$, então $\mathbb{P}(|\vec{\mathcal{C}}| < \infty) < 1$, e logo $\vec{\theta} > 0$. $\square$

Dem. da Proposição 2

Vamos considerar o modelo de percolação orientada em $\mathbb{W}$ em que o elo $\langle(\ell, n); (\ell+1, n+1)\rangle$ está aberto se e somente se não houver marcas de cura nos intervalos de tempo $\{\ell\} \times (\varepsilon n, \varepsilon(n+1))$ e $\{\ell+1\} \times (\varepsilon n, \varepsilon(n+1))$, e, além disto, houver um elo de infecção $\langle \ell; \ell+1\rangle(s)$ para algum $s \in (\varepsilon n, \varepsilon(n+1))$, onde $\varepsilon > 0$, a ser escolhido.

Similarmente, elo $\langle(\ell, n); (\ell-1, n+1)\rangle$ está aberto se e somente se não houver marcas de cura nos intervalos de tempo $\{\ell\} \times (\varepsilon n, \varepsilon(n+1))$ e $\{\ell-1\} \times (\varepsilon n, \varepsilon(n+1))$, e, além disto, houver um elo de infecção $\langle \ell; \ell-1\rangle(s)$ para algum $s \in (\varepsilon n, \varepsilon(n+1))$.

Podemos verificar prontamente que se trata de um modelo de percolação orientada 1-dependente, e podemos escolher *eps* > 0 e $\lambda > 0$ tal que $p = p(\varepsilon, \lambda) > p_0$, o limiar estipulado no enunciado do Lema 1.

Como $|\vec{\mathcal{C}}| = \infty \Rightarrow |$ sobrevivência da infecção inicialmente na origem no processo de contato, o resultado segue do Lema 1. $\square$

Medidas invariantes

A medida $\delta_{\mathbf{0}}$, probabilidade 1 na configuração $\eta = \mathbf{0} \equiv 0$, é obviamente invariante para o processo de contato (a dinâmica ela própria não altera esta configuração).

Se $\nu_0 = \delta_{\mathbf{0}}$, então $\nu_t = \delta_{\mathbf{0}}\ \forall\ t \geq 0$, onde ν_t é a distribuição de η_t, $t \geq 0$.

No outro extremo, o que acontece com ν_t se $\nu_0 = \delta_{\mathbf{1}}$, que atribui probabilidade 1 na configuração $\eta = \mathbf{1} \equiv 1$?

Seja $\nu_t^{\mathbf{1}}$ a distribuição de $\eta_t^{\mathbf{1}}$, $t \geq 0$.

Pelas ppddes de Markov, homogeneidade temporal, e monotonicidade de (η_t) (vide ponto 1 no Slide 10), temos que

$$\eta_{t+s}^{\mathbf{1}} \sim \eta_t^{\eta_s^{\mathbf{1}}} \leq \eta_t^{\mathbf{1}},\ s, t \geq 0.$$

Logo, $\bar{\nu} = \lim_{t\to\infty} \nu_t^{\mathbf{1}}$ existe (por monotonicidade).

Não trivialidade de $\bar{\nu}$

Teorema 2

$\bar{\nu}$ é invariante por translações e $\bar{\nu}(\eta(0) = 1) = \vec{\theta}$.

Em particular,

1. se $\vec{\theta} = 0$, então $\bar{\nu} = \delta_{\mathbf{0}}$;
2. se $\vec{\theta} > 0$, então $\bar{\nu} \neq \delta_{\mathbf{0}}$.

Dem. A primeira afirmação é clara. Para a verificar a segunda, vamos usar a *relação de dualidade* $(*)$ — vide Slide 10.

$$\begin{aligned}\bar{\nu}(\eta(0) = 1) &= \lim_{t\to\infty} \nu_t^{\mathbf{1}}(\eta(0) = 1) \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{t\to\infty} \nu_t^{\delta_{\mathbf{0}}}\Big(\textstyle\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \eta(x) > 0\Big) = \vec{\theta}.\end{aligned}$$ $\square$

Obs.

Vale o seguinte resultado.

Teorema da convergência completa

Dada uma conf $\zeta \in \Omega$, temos que

$$\nu_t^{\zeta} \Rightarrow \alpha_\zeta \, \bar{\nu} + (1 - \alpha_\zeta) \, \delta_{\mathbf{0}}$$

quando $t \to \infty$, onde

$\alpha_\zeta = \mathbb{P}\big(\sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta_t(x) > 0 \, \forall \, t \geq 0 \big| \eta_0 = \zeta \big)$.

Dem. Liggett (1999)