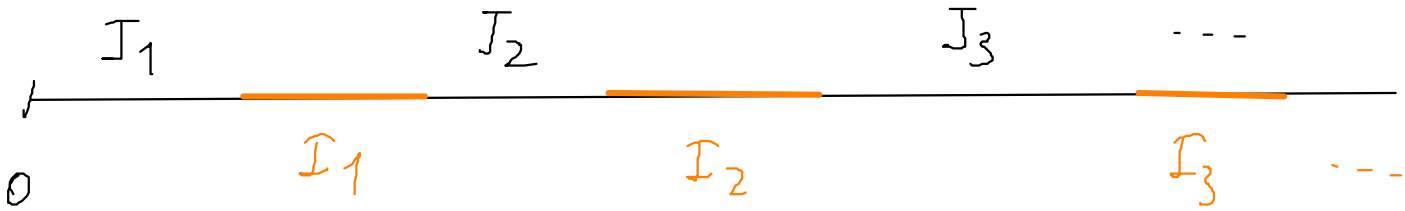
Ex 13 b, Cap 6, S. Ross (11ª ed.)

Consideremos os períodos alternados em que a barbearia está cheia (observamos que ela esteja inicial/e vazia):



Seja N_t o nº de chegadas de clientes pertencentes à barbearia até o tempo t. $(N_t) \sim PP(\lambda)$.

Nos períodos $I_1, I_2, \ldots$, a chegada de clientes se dá segundo um $PP(\lambda)$ independente dos comprimentos (já que estes dependem exclusivamente do tempo de atendimento, que

mpomos independentes das

duações). Sejam $|I_\ell|, |J_\ell|$

os comprimentos dos intervalos I_ℓ, J_ℓ,

$\ell = 1, 2, \dots$, respectivamente, e para

$n \geq 1$, $S_n = \sum_{\ell=1}^{n} |I_\ell|$, $T_n = \sum_{\ell=1}^{n} (|I_\ell| + |J_\ell|)$

Do Teo Ergódico:

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} 1\{X_t = 2\} dt$$

$$\xrightarrow[n \to \infty]{qc} \pi_2 \text{ -- o peso da distr. inv. do processo em } 2.$$

(pois $T_n \xrightarrow{qc} \infty$ qdo $n \nearrow \infty$)

Seja (N'_t) o processo de depuração de dimitas na união concatenada dos intervalos $I_1, I_2, \dots \sim PP(\lambda)$.

Da Lei dos Grandes Nºs p/ o PP (λ):

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{qc}} \lambda$$

(não vimos esse resultado explicitamente, mas segue dos Teos 1 e 2 do Álbum 10 - independência, estacionariedade e poissonidade dos incrementos do PP - e da Lei dos Grandes Nºs para v.a.'s iid),

segue que

$$\frac{N'_{S_n}}{S_n}, \frac{N_{T_n}}{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{qc}} \lambda.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{N'_{S_n}}{N_{T_n}}\right) = 1-\lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{N'_{S_n}}{S_n}}_{\to\lambda}\underbrace{\frac{S_n}{T_n}}_{\to\pi_2}\underbrace{\frac{1}{N_{T_n}/T_n}}_{\to\lambda}$$

$$= 1-\pi_2 \checkmark$$