Apêndice B

Volta à origem do passeio aleatório

Como antecipado no final da Subseção 3.2.1 acima (vide parágrafo logo abaixo de (3.45)), vamos fazer uso da propriedade de falta/perda de memória do passeio aleatório (também conhecida como *propriedade de Markov*), que diz que quando o passeante, saindo da origem, retorna à origem pela primeira vez, num tempo finito T, então, a partir de T, tudo se passa, em termos probabilísticos, como se o passeante estivesse começando seu passeio de novo, esquecendo/independente de o que aconteceu até T. Com isto podemos escrever para $n \geq 1$ (fazendo $S(n) = S_n$)

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(T = i, S_n = 0) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(T = i)\mathbb{P}(S_{n-i} = 0). \tag{B.1}$$

Adotando a notação $u_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$ e $f_n = \mathbb{P}(T = n)$, $n \geq 0$, notemos primeiramente que $u_0 = 1$ e $f_0 = 0$; e (B.1) nos diz que

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} f_i u_{n-i}, \quad n \geq 1. \tag{B.2}$$

Fazendo agora $U_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$, $N \geq 1$, segue das observações acima que

$$
\begin{aligned}
U_N &= 1+\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{n} f_i u_{n-i} = 1+\sum_{i=1}^{N}\sum_{n=i}^{N} f_i u_{n-i} = 1+\sum_{i=1}^{N} f_i \sum_{n=i}^{N} u_{n-i} \\
&= 1+\sum_{i=1}^{N} f_i \sum_{\ell=0}^{N-i} u_\ell = 1+\sum_{i=1}^{N} f_i U_{N-i} \leq 1+U_N F_N, \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

onde, na penúltima igualdade, fizemos, na segunda soma, a troca de variável $\ell = n-i$; usamos ainda o fato de que $U_{N-i} \leq U_N$ para todo $i = 1,\dots,N$, e introduzimos a notação $F_N = \sum_{i=1}^{N} f_i$; notemos que $F_N = \mathbb{P}(T \leq N)$, e logo

$$
\mathbb{P}(T=\infty) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}(T>N) = \lim_{N\to\infty}(1-\mathbb{P}(T\leq N)) = \lim_{N\to\infty}(1-F_N), \quad \text{(B.4)}
$$

onde o evento $\{T=\infty\}$ corresponde ao passeante jamais voltar à origem.

Segue de (B.3) que

$$
1-F_N \leq \frac{1}{U_N}; \qquad \text{(B.5)}
$$

logo, para concluir que o passeante volta à origem com probabilidade 1, em outras palavras, que $\mathbb{P}(T=\infty)=0$, basta mostrar o seguinte resultado.

Lema B.1

$$
\lim_{N\to\infty} U_N = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \infty \qquad \text{(B.6)}
$$

Demonstração

Lembremos (da Subseção 3.2.1) que $u_n = 0$, se n for ímpar, e que

$$
u_{2n} = \mathbb{P}(S_{2n}=0) = \binom{2n}{n} 4^{-n}, \quad n \geq 0. \qquad \text{(B.7)}
$$

Agora, para $n \geq 1$,

$$
\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{i=1}^{n} \frac{2i(2i-1)}{i^2} = 4^n \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{2i}\right) \geq 4^n \frac{1}{2} \prod_{i=2}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right). \qquad \text{(B.8)}
$$

O último produto acima vale

$$\begin{aligned}\prod_{i=2}^{n}\frac{i-1}{i} &= \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-2}{n-1}\times\frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\times\cdots\times\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\times\frac{\cancel{n-1}}{n}=\frac{1}{n}. \qquad \text{(B.9)}\end{aligned}$$

Basta então mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty. \qquad \text{(B.10)}$$

Este é um resultado bem conhecido, mas vamos apresentar um argumento simples. Façamos $B_1=\{1,2\}$, e para $k\geq 2$, $B_k=\{2^{k-1}+1,2^{k-1}+2,\ldots,2^k\}$. Notemos que

- se $n\in B_k$, então $\frac{1}{n}\geq 2^{-k}$;
- $|B_1|=2$ e, para $k\geq 2$, $|B_k|=2^{k-1}$.

Segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in B_k}\frac{1}{n}\geq\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n\in B_k}2^{-k}=\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|2^{-k}=1+\sum_{k=2}^{\infty}2^{k-1}2^{-k}\geq\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2},$$

que obviamente vale ∞. $\square$

Observações.

1. A desigualdade em (B.8) é de fato excessiva. Pode-se mostrar, com um pouco mais de trabalho, que o penúltimo produto em (B.8) é de fato da ordem de magnitude de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ — i.e., o produto de $\sqrt{n}$ por aquele produto é cotado uniformemente para todo $n\geq 1$, inferior e superiormente, por constantes estritamente positivas e finitas; de fato, o limite quando $n\to\infty$ existe.

   Esta correção é importante em outras considerações sobre o passeio aleatório, mas para os nossos propósitos neste apêndice, a cota inferior obtida em (B.8) é suficiente, e nos permite na sequência concluir com um argumento bastante simples (usando a decomposição da soma de (B.10) nos blocos B_k, $k\geq 1$, e suas propriedades, como indicado acima).

2. Como antecipado ao final da Subseção 3.2.1, os argumentos acima respondem à questão sobre a volta à origem do passeante com probabilidade 1 (de forma positiva, como acabamos de ver acima), por um lado, e por outro lado prescinde dos argumentos da Subseção 3.2.1 envolvendo o princípio da reflexão. Aqueles argumentos são no entanto importantes para obter (3.45), que fornece a distribuição de probabilidades (dos valores finitos) da variável aleatória T. Como por sua vez (3.45) não fornece de forma muito imediata resposta à questão da finitude de T com probabilidade 1 (i.e., não há um argumento muito direto para estabelecer (3.46) substituindo as expressões à direita de (3.45) nos somandos), em certo sentido os resultados da Subseção 3.2.1 e deste apêndice se complementam.

3. Podemos formular uma versão do passeio aleatório da Subseção 3.2.1 em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 2$ (lembremos que o passeio aleatório estudado até agora toma valores em $\mathbb{Z}$): a cada passo, o passeante, independentemente do que ocorreu nos passos anteriores, escolhe uma das direções de $\mathbb{Z}^d$ com iguais probabilidades (logo, iguais a $\frac{1}{d}$ cada uma), e em seguida dá um passo de tamanho 1, ou no sentido positivo daquela direção, ou no sentido negativo, de novo com iguais probabilidades (de forma que temos um total de $2d$ possibilidades para cada passo, todas com a mesma probabilidade).

   De novo, podemos fazer a pergunta sobre a volta à origem com probabilidade 1, e notavelmente a resposta depende de d. Se $d = 2$, então a volta ocorre com probabilidade 1, como no caso unidimensional, mas para $d \geq 3$ temos que a probabilidade de o passeante jamais voltar à origem é positiva. (Isto pode ser verificado com a mesma estratégia usada acima, estendendo e/ou refinando algumas das passagens.)