Apêndice A

Integral de uma função

Dada uma função positiva definida num intervalo $f : (a, b) \to [0, \infty)$, onde a pode ser $-\infty$ e b pode ser $+\infty$, a *integral de f em (a, b)*, denotada

$$\int_a^b f(x)\,dx, \tag{A.1}$$

é informalmente falando a área da figura delimitada pelo gráfico de f e o eixo das abscissas entre a e b. Veja as Figuras A.1 e A.2.

A definição formal da integral, inclusive qual precisamente o tipo de função para que tal definição faz sentido, é objeto do curso de Cálculo. Nestas notas vamos apenas dizer que para as funções que consideramos não há maiores dificuldades, e vamos indicar rapidamente como obter a integral de alguns tipos de função, o que será suficiente para nossos propósitos.

Primeiro algumas propriedades da integral. Sejam $f, g : (a, b) \to [0, \infty)$

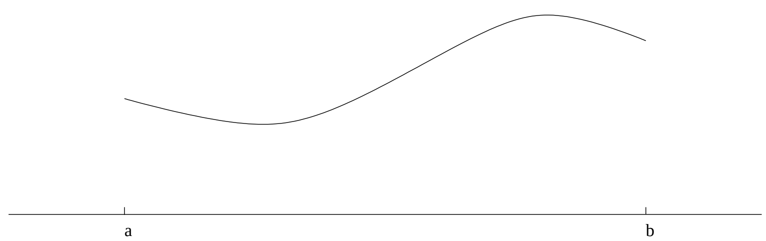

Figura A.1 Curva representa o gráfico de f entre a e b.

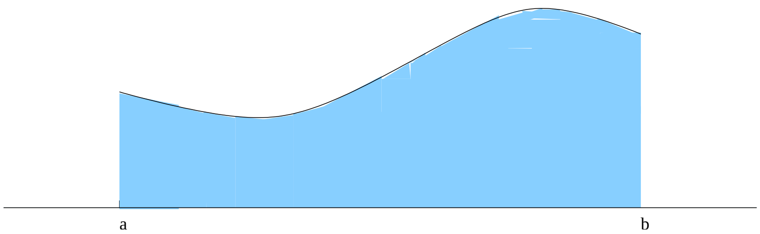

Figura A.2 $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área da região sombreada

duas funções , e $C \geq 0$ uma constante. Temos

$$\int_a^b C\,f(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx; \tag{A.2}$$

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx. \tag{A.3}$$

Se $f:(a,c)\longrightarrow[0,\infty)$, então

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx \tag{A.4}$$

sempre que $a<b<c$.

Exemplo A.1

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \tag{A.5}$$

para todo $n\geq 0$, $0\leq a\leq b<\infty$.

Exemplo A.2

$$\int_a^b e^{-\lambda x}\,dx = \frac{e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}}{\lambda} \tag{A.6}$$

para todo $\lambda>0$ *e* $-\infty<a\leq b<\infty$.

Exemplo A.3 *Seja* $f:(0,2)\longrightarrow[0,\infty)$ *tal que*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & se\ 0<x\leq 1,\\ 1+x^2, & se\ 1<x<2 \end{cases} \tag{A.7}$$

Veja o gráfico de f *na Figura A.3. Então,*

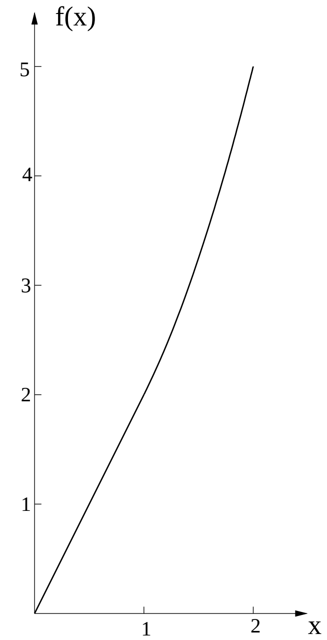

Figura A.3

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 f(x)\,dx &\overset{(A.4)}{=} \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx \\
&\overset{(A.7)}{=} \int_0^1 2x\,dx + \int_1^2 (x^2+1)\,dx \\
&\overset{(A.2,A.3)}{=} 2\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_1^2 x^2\,dx \\
&\overset{(A.5)}{=} 2 + (2-1) + \frac{2^3-1^3}{3} \\
&= 2 + 1 + \frac{7}{3} = \frac{16}{3}. \qquad \text{(A.8)}
\end{aligned}
$$

Observação A.1 *Podemos estender a definição de integral para funções que podem tomar valores negativos. Neste caso, a interpretação de área sob gráfico precisa ser modificada (mais detalhes a respeito no curso de Cálculo).*

As propriedades (A.2-A.4) se mantém, sendo que (A.2) é válida para constantes negativas também. No Exemplo A.1, a e b podem ser negativos. Veja o exemplo A.4 abaixo.

Exemplo A.4

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^6 - 2e^{-2x})\, dx \\
= \; & \int_{-1}^{2} x^3\, dx - 3 \int_{-1}^{2} x^6\, dx - 3 \int_{-1}^{2} e^{-2x}\, dx \\
= \; & \frac{2^4 - (-1)^4}{4} - 3\frac{2^7 - (-1)^7}{7} - 3\frac{e^{-2(-1)} - e^{-2\times 2}}{2} \\
= \; & \frac{15}{4} - 3\frac{129}{7} - 3\frac{e^2 - e^{-4}}{2} = -62.59 \qquad \text{(A.9)}
\end{aligned}$$