Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Processo Estocástico

Modelo matemático para fenômenos aleatórios que ocorrem em sequências. Exemplos de fenômenos:

1. Sucessivos resultados de lances de moeda / dado: CCKCKKCCCK... / 351214...;
2. situação pluviométrica em dado local em sucessivos dias (C = chove; N = não chove): CCNNNCNNCCCNNNCC... ;
3. número de clientes/trabalhos esperando para serem atendidos/ executados por um servidor em sucessivos instantes: 0 1 2 3 2 1 2 3 4 5 4 3 2 3 4 3 2 1 0...;
4. letras de um texto (alfabeto = $\{$a,b,c,$\varnothing\}$): aba$\varnothing$bcab$\varnothing$cc...;
5. configuração microscópica de um fluido unidimensional em dado instante (0 = espaço vazio, 1 = presença de molécula do fluido): ...0 1 0 1 0 0 1 1...;
6. opiniões de moradores de uma rua sobre questão que afeta o bairro (C= contra, F = a favor): ...C F C F F C...

Observação

1. Razoável supor independência entre sucessivas posições no Exemplo 1, mas não necessariamente nos demais exemplos.
2. Há uma evolução temporal subjacente nos exs 1-3, mas não necessariamente em 4-6 (talvez em 4).

Processo estocástico (em *tempo* discreto)

Sequência de v.a.'s $X_0, X_1, X_2, \ldots$ ou $(X_n)_{n\geq 0}$ ou (X_n) ou X_n

$\mathcal{S}$ = *espaço de estados* ($X_n \in S$, $n \geq 0$);
$\mathcal{S}$ finito ou infinito enumerável (normalmente um subcj de $\mathbb{N}$)

Nos exs: 1. $\mathcal{S} = \{$C,K$\}$ / $\{1,2,3,4,5,6\}$; 2. $\mathcal{S} = \{$C,N$\}$;
3. $\mathcal{S} = \mathbb{N}$; 4. $\mathcal{S} = \{$a,b,c,$\varnothing\}$; 5. $\mathcal{S} = \{0,1\}$;
6. $\mathcal{S} = \{$C,F$\}$

Interesse: distribuição de probabilidades de (X_n)

Descrita pelas *distribuições finito-dimensionais*:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n),\ x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{S},\ n \geq 0$$

Exemplo 1

Podemos supor independência:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\ =\ &\mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1)\cdots\mathbb{P}(X_n = x_n) \\ =\ &\mu(x_0)\mu(x_1)\cdots\mu(x_n), \end{aligned}$$

onde $\mu(\cdot)$ é a distribuição de probabilidade associada a um lance.

Cadeias de Markov

(X_n) é uma *Cadeia de Markov* se valer a *propriedade de Markov*:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0)$$

$$= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n),$$

$x_0, x_1, \ldots \in \mathcal{S}$; $n \geq 0$.

Homogeneidade temporal (em 1 passo)

Suporemos também que:

$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)$, $x, y \in \mathcal{S}$; $n \geq 0$.

Cadeia de Markov

Distribuição inicial

Seja μ uma distribuição de probabilidade em $\mathcal{S}$, isto é,

$$\mu : \mathcal{S} \to [0, 1]; \quad \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu(x) = 1.$$

Dizemos que μ é a distribuição inicial de X se

$$\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu(x),\ x \in \mathcal{S}.$$

Probabilidades de transição

$$P(x, y) = P_{xy} := \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x),\ \ x, y \in \mathcal{S}$$

Matriz de transição

$\mathcal{S} = \{1, 2, \ldots\}$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & y & \cdots \end{array} \\ \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1y} & \cdots \\ P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2y} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{x1} & P_{x2} & \cdots & P_{xy} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \end{array},$$

Obs. 1) $\mathbf{P} = (P(x,y),\ x,y \in \mathcal{S})$ é uma *matriz estocástica*, isto é

$$P(x,y) \in [0,1],\ x,y \in \mathcal{S};\ \sum_{y \in \mathcal{S}} P(x,y) = 1,\ x \in \mathcal{S}.$$

2) $\mathbf{P}$ sempre tem autovalor 1 associado a autovetor constante.

Exemplos

1) Meteorologia. 1 = chuva; 2 = sem chuva; $\mathcal{S} = \{1, 2\}$

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1 & \quad\quad 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array},$$

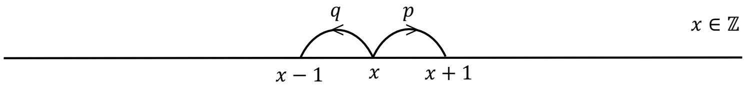
ie, $P_{11} = 1 - \alpha$, $P_{12} = \alpha$, $P_{21} = \beta$, $P_{22} = 1 - \beta$; $\alpha, \beta \in [0, 1]$.

$$\alpha = \text{prob(sem chuva amanhã}|\text{chuva hoje)}$$

$$\beta = \text{prob(chuva amanhã}|\text{sem chuva hoje)}$$

Exemplos

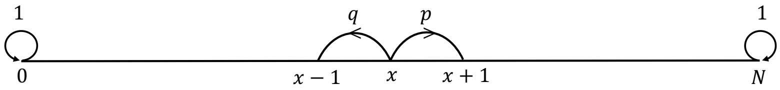
2) Passeio aleatório. $\mathcal{S} = \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$



$$P_{x,x+1} = p;,\ \ P_{x,x-1} = 1 - p = q;\, p \in [0,1].$$

Exemplos

3) Apostas. $\mathcal{S} = \{0, 1, \ldots, N\}$



$0 < x < N$

$$P_{00} = P_{NN} = 1;$$

$$0 < x < N\text{:}\ \ P_{x,x+1} = p;,\ \ P_{x,x-1} = 1 - p = q;\ p \in [0, 1].$$

Cadeia de Markov — caracterização

Proposição 1. A distribuição inicial μ e a matriz de transição $\mathbf{P}$ determinam a distribuição de probabilidades de toda Cadeia de Markov (X_n).

Dem. Basta mostrar que as distribuições finito-dimensionais são determinadas por μ e $\mathbf{P}$: dados $x_0, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$, $n \geq 0$, temos que, condicionando sucessivamente,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) \\
= & \, \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = x_1, X_0 = x_0) \times \\
& \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) \\
\overset{\text{Markov}}{=} & \, \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}) \\
= & \, \mu(x_0) P(x_0, x_1) \cdots P(x_{n-1}, x_n). \qquad (*)
\end{aligned}$$

$\square$

Cadeia de Markov — caracterização (cont.)

Proposição 1′. Reciprocamente, dadas uma distribuição de probabilidade μ e uma matriz estocástica $\mathbf{P}$ em $\mathcal{S}$, existe uma Cadeia de Markov (X_n) em $\mathcal{S}$ com distribuição inicial μ e matriz de transição $\mathbf{P}$.

Demonstração. Basta notar que $\mu(x_0)P(x_0,x_1)\cdots P(x_{n-1},x_n)$, $x_0,\ldots,x_n \in \mathcal{S}$, $n \geq 0$, formam uma família *consistente* de distribuições finito-dimensionais, e invocar o Teorema de Kolmogorov.* $\square$

Notação. $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\mu,\mathbf{P})$: (X_n) é uma/a Cadeia de Markov em $\mathcal{S}$ com distribuição inicial μ e matriz de transição $\mathbf{P}$.

---

*O Teo de Kolmogorov de fato afirma que há uma *única* distribuição de probabilidade em $\mathcal{S}^{\mathbb{N}} = \mathcal{S} \times \mathcal{S} \times \cdots$ cujas distribuições finito-dimensionais são dadas pelo lado direito de $(*)$.

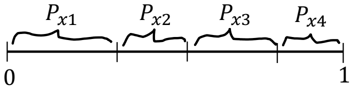
Construção/Simulação de uma Cadeia de Markov

Dada uma distribuição de probabilidades μ e uma matriz estocástica $\mathbf{P}$ em $\mathcal{S}$ enumerável, vamos definir as seguintes partições de $[0,1]$ (isto é, famílias de subintervalos de $(0,1)$, $\{I_1, I_2, \ldots\}$, com a seguinte propriedade: $I_j \cap I_k = \emptyset$, $j \neq k$, e $\cup_{j \geq 1} I_j = [0,1]$):

$$\mathcal{P}^0 = \{I_x,\ x \in \mathcal{S}\} \text{ e p}/x \in \mathcal{S},\ \mathcal{P}_x = \{I^x_y,\ y \in \mathcal{S}\}, \text{ tais que}$$

$$|I_x| = \mu_x \text{ e },|I^x_y| = P_{xy},\ x, y \in \mathcal{S}, \text{ onde } |\cdot| \text{ denota o comprimento.}$$

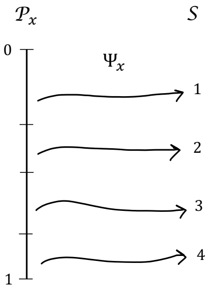
$S = \{1,2,3,4\}$ $\qquad$ $\mathcal{P}_x$



Construção

Sejam agora as funções Ψ^0, $\Psi_x : [0,1] \to \mathcal{S}$ tais que

$$\Psi^0(u) = x, \text{ se } u \in I_x; \text{ e } \Psi_x(u) = y, \text{ se } u \in I_y^x.$$



Finalmente sejam $U_0, U_1, \ldots$ va's iid com distribuição Uniforme em [0,1].

Construção de (X_n)

$X_0 = \Psi^0(U_0)$, e, para $n \geq 1$, dado que $X_{n-1} = x$, façamos $X_n = \Psi_x(U_n)$.

Vê-se prontamente que $(X_n) \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$.

Transição em n passos

Def.

$P^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x)$ ... probabilidade de transição em n passos de x a y, $x, y \in \mathcal{S}$, $n \geq 1$

$\mathbf{P}^{(n)} = (P^{(n)}(x,y),\ x, y \in \mathcal{S})$ ... matriz de transição em n passos

Obs. 1) *(Homogeneidade temporal em n passos)*

Verifique que $P^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}(X_{n+m} = y | X_m = x)$, $m, n \geq 1^\dagger$;

2) $\mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}$; $\mathbf{P}^{(0)} := \mathbf{I}$, a matriz identidade;

3) Também usaremos a notação $P_{xy}^{(n)} = P^{(n)}(x,y)$;

4) Também usaremos a notação $\mathbb{P}_\mu = \mathbb{P}$, quando quisermos explicitar a distribuição inicial μ, e

$$\mathbb{P}_x, \text{ quando } \mu(y) = \delta_{xy} = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y \end{cases}.$$

---

†Segue da homogeneidade temporal em 1 passo, condicionando-se apropriadamente, e usando-se a propriedade de Markov.

Transição em n passos (cont.)

Proposição 2. $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n$, $n \geq 0$

Dem. Casos $n = 0$ e 1 são claros. Suponha a tese válida para $n \geq 1$; então, introduzindo a notação $\mathbf{P}^n =: (P^n_{xy})_{x,y \in \mathcal{S}}$,

$$\begin{aligned}
P^{(n+1)}_{xy} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_0 = x) = \sum_{z \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_{n+1} = y, X_n = z | X_0 = x) \\
&\overset{\text{cond.}}{=} \sum_{z \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = z, X_0 = x) \mathbb{P}(X_n = z | X_0 = x) \\
&\overset{\text{Markov}}{=} \sum_{z \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = z) P^{(n)}_{xz} \\
&\overset{\text{hip. ind.}}{=} \sum_{z \in \mathcal{S}} P_{zy} P^n_{xz} = P^{n+1}_{xy}.
\end{aligned}$$

Transição em n passos (cont.)

Obs. 1) $\mathbf{P}^n$ é uma matriz estocástica, $n \geq 0$.

2) Valem as *Equações de Chapman-Kolmogorov*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{m+n} = y | X_0 = x) &= P^{(m+n)}(x,y) \overset{\text{Prop 2}}{=} P^{m+n}(x,y) \\ &= (\mathbf{P}^m\mathbf{P}^n)(x,y) = \sum_{z\in\mathcal{S}} P^m_{xz}P^n_{zy} = \sum_{z\in\mathcal{S}} P^{(m)}_{xz}P^{(n)}_{zy} \\ &= \sum_{z\in\mathcal{S}} \mathbb{P}(X_m = z|X_0 = x)\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = z),\end{aligned}$$

$x, y \in \mathcal{S}$, $n, m \geq 1$.

3) Distribuição de X_n

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_n = y) &= \sum_{x\in\mathcal{S}} \mathbb{P}(X_0 = x)\mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) \\ &= \sum_{x\in\mathcal{S}} \mu(x)P^{(n)}_{xy} = (\mu\mathbf{P}^{(n)})(y) = (\mu\mathbf{P}^n)(y),\ \ y \in \mathcal{S}\end{aligned}$$

Em outras palavras, $\mathbb{P}(X_n = \cdot) = \mu\mathbf{P}^n$, $n \geq 0$.

Exemplos

1) Meteorologia

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.61 & 0.39 \\ 0.52 & 0.48 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.583 & 0.417 \\ 0.556 & 0.444 \end{pmatrix}, \ldots$$

Exemplos

Há exemplos (mais ou menos simples) em que se podem obter as probabilidades de transição em n passos explicitamente.

2) CM com dois estados: $\mathcal{S} = \{1, 2\}$; $\mathbf{P} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \end{array}$,

ie, $P_{11} = 1-\alpha,\ P_{12} = \alpha,\ P_{21} = \beta,\ P_{22} = 1-\beta;\ \alpha, \beta \in [0, 1]$.
Suponha que $\alpha + \beta > 0$, se não $\mathbf{P} = \mathbf{I}$, e temos um caso trivial.
De $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)}\mathbf{P}$, segue

$$\begin{aligned} P_{11}^{(n)} &= P_{11}^{(n-1)} P_{11} + P_{12}^{(n-1)} P_{21} = P_{11}^{(n-1)}(1-\alpha) + P_{12}^{(n-1)}\beta \\ &= (1-\alpha)P_{11}^{(n-1)} + \beta\,(1 - P_{11}^{(n-1)}) = (1-\alpha-\beta)P_{11}^{(n-1)} + \beta, \end{aligned}$$

$n \geq 1$.

Exemplo 2 (cont.)

A equação de diferença

$$(*) \begin{cases} P_{11}^{(n)} = (1-\alpha-\beta)P_{11}^{(n-1)} + \beta, \; n \geq 1; \\ \quad P_{11}^{(0)} = 1, \end{cases}$$

tem como solução $P_{11}^{(n)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n, \; n \geq 0$

(que pode ser obtida iterando-se a 1a linha de $(*)$ e usando-se a 2a linha ao final).

$P_{12}^{(n)} = 1 - P_{11}^{(n)}$; por simetria: $P_{22}^{(n)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\alpha-\beta)^n$,

$$P_{21}^{(n)} = 1 - P_{22}^{(n)}$$

Obs. (*Perda de memória assintótica*) Note que se $\alpha + \beta < 2$:

$$\lim_{n\to\infty} P_{11}^{(n)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \lim_{n\to\infty} P_{21}^{(n)}$$

$$\lim_{n\to\infty} P_{22}^{(n)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \lim_{n\to\infty} P_{12}^{(n)}$$

Exemplos (cont.)

$2')$ $N \geq 2$ variedades de um vírus. A cada geração um vírus pode se manter na mesma variedade, ou sofrer uma mutação, o que acontece com prob $\alpha \in (0, 1]$, e, neste caso, uma das outras $N-1$ variedades ocorre com distribuição uniforme. Qual a probabilidade de que a variedade da n-ésima geração seja a mesma do que a inicial?
Temos que as sucessivas variedades do vírus ao longo das gerações pode ser descrita por uma CM em $\mathcal{S} = \{1, \ldots, N\}$, com matriz de transição $\mathbf{P}$ tal que

$$P_{xx} = 1 - \alpha, \; P_{xy} = \frac{\alpha}{N-1}, \; x \neq y \in \mathcal{S}, \; \alpha > 0.$$

Pela simetria do modelo, temos que $P_{xx}^{(n)}$ não depende de $x \in \mathcal{S}$, e logo $P_{11}^{(n)}$ é a probabilidade que procuramos.

Exemplo 2′ (cont.)

Podemos ainda simplificar este problema da seguinte forma. Seja

$$\tilde{X}_n = \begin{cases} 1, & \text{se } X_n = 1; \\ 2, & \text{se } X_n \neq 1. \end{cases}$$

Verifica-se (faça-o) que $(\tilde{X}_n)$ é uma CM com matriz de transição

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}, \ \beta = \frac{\alpha}{N-1}.$$

Com isto, temos finalmente que

$$P_{11}^{(n)} = \tilde{P}_{11}^{(n)} = \frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \alpha\frac{N}{N-1}\right)^n, \ n \geq 0.$$

Exemplos (cont.)

3) $\mathcal{S} = \{1,2,3\}$ (CM com 3 estados)

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Vamos (tentar) diagonalizar $\mathbf{P}$. Equação característica:

$$\det(x\mathbf{I} - \mathbf{P}) = x\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (x-1)\left(x^2 + \frac{1}{4}\right) = 0$$

Autovalores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = i/2$, $\lambda_3 = -i/2$, e logo

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/2 & 0 \\ 0 & 0 & -i/2 \end{pmatrix}\mathbf{U}^{-1},$$

para certa matriz inversível $\mathbf{U}$.

Exemplo 3 (Obs)

1) $\mathbf{U}$ pode ser escrita como (v_1^t, v_2^t, v_3^t), onde $v_j = (v_{1j}, v_{2j}, v_{3j})$ é um autovetor de $\mathbf{P}$ associado ao autovalor λ_j, $j = 1, 2, 3$.
2) $\lambda = 1$ é sempre um autovalor de $\mathbf{P}$, associado ao autovetor $(1, 1, 1)$, pelo fato de $\mathbf{P}$ ser estocástica.
3) De posse de $\mathbf{U}$, temos que

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (i/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-i/2)^n \end{pmatrix} \mathbf{U}^{-1}. \tag{2}$$

Agora,

$$\left(\pm\frac{i}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2} e^{\pm i \frac{\pi}{2}}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n e^{\pm i\, n \frac{\pi}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{\cos n\frac{\pi}{2} \pm i \sin n\frac{\pi}{2}\right\},$$

e podemos escrever

$$P_{11}^{(n)} = \alpha + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{\beta \cos n\frac{\pi}{2} + \gamma \sin n\frac{\pi}{2}\right\}, \; n \geq 0, \tag{3}$$

para certas constantes reais α, β, γ, que podem ser obtidas de $\mathbf{U}$, mas...

Exemplo 3 (cont)

... vamos, alternativamente, simplesmente comparar (3) ao que obtemos de $\mathbf{P}^n$, $n = 0, 1, 2$, usando (1).

$$P_{11}^{(0)} = 1 = \alpha + \beta, \quad P_{11}^{(1)} = 0 = \alpha + \gamma/2, \quad P_{11}^{(2)} = 0 = \alpha - \beta/4$$

Segue que $\alpha = 1/5, \quad \beta = 4/5, \quad \gamma = -2/5$. Substituindo em (2):

$$P_{11}^{(n)} = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{ \frac{4}{5} \cos n\frac{\pi}{2} - \frac{2}{5} \sin n\frac{\pi}{2} \right\}, \; n \geq 0, \tag{4}$$

e podemos similarmente obter expressões para $P_{xy}^{(n)}$, $x, y \in \mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ finito

1) De posse dos autovalores de $\mathbf{P}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, $m = |\mathcal{S}| < \infty$, *se eles forem todos distintos*, podemos escrever

$$(\star) \qquad P_{11}^{(n)} = \alpha_1 \lambda_1^n + \ldots + \alpha_m \lambda_m^n, \quad n \geq 0,$$

para certos coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$[‡], que podem ser obtidos de $\mathbf{U}$ a partir de uma expressão análoga a (2). A alternativa utilizada acima também é viável.

2) No caso de autovals com multiplicidade ≥ 2, a representação $(\star)$ pode se complicar, com o surgimento de coeficientes polinomiais em n (qdo $\mathbf{P}$ não for diagonalizável).

3) O Exemplo 2 pode ser resolvido desta forma — matrizes estocásticas 2×2 podem ser sempre diagonalizadas (com autovalores e autovetores reais).

‡possivelmente complexos, assim como os autovalores; obviamente $P_{11}^{(n)}$ é real