O teorema do gráfico fechado para aplicações multilineares

Glaucio Fabiano da Silva [1], *IME-USP*
Orientador: Prof. Dr. Leonardo Pellegrini

1 Introdução

Sejam M e N espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. Então é fácil ver que o gráfico de f

$$G(f) := \{(x, y) \in M \times N : y = f(x)\}$$

é um subconjunto fechado de $M \times N$ (estamos considerando em $M \times N$ a topologia produto). De fato, definindo

$$\phi : (x, y) \in M \times N \mapsto \phi(x, y) = d(f(x), y) \in \mathbb{R},$$

vemos claramente que ϕ é contínua, pois a métrica $d : M \times N \to \mathbb{R}$ é contínua. Portanto $G(f) = \phi^{-1}(\{0\}) = \{(x, y) \in M \times N : \phi(x, y) = 0\}$ é fechado em $M \times N$, pois $\{0\}$ é fechado em $\mathbb{R}$.

O Teorema do Gráfico Fechado trata da recíproca deste fato no contexto de espaços de Banach. Seu enunciado diz que se X, Y são espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma transformação linear com gráfico fechado, então T é contínua.

Tal teorema é juntamente com o Princípio da Limitação Uniforme e o Teorema da Aplicação Aberta, um dos teoremas fundamentais no estudo dos espaços de Banach.

[1] Bolsista do programa Ensinar com Pesquisa 2009.

Neste trabalho, nos propomos a apresentar uma demonstração do Teorema do Gráfico Fechado para aplicações multilineares, ou seja, mostraremos que se $E_1, E_2, \ldots, E_m$, F são espaços de Banach e $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ uma aplicação multilinear com gráfico fechado, então A é contínua.

Denotaremos por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$.

2 Aplicações Multilineares

Definição 1. *Sejam $m \in \mathbb{N}$; $E_1, E_2, \ldots, E_m$ e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Dizemos que uma aplicação $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ é m-linear (multilinear) se é linear em cada variável. De forma mais precisa, temos que $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ é m-linear se as funções $x_i \to A(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ são lineares.*

O conjunto de todas as aplicações m-lineares torna-se um espaço vetorial se o munirmos com as operações usuais de espaços de funções. Denotemos por $L_a(E_1, \ldots, E_m; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações m-lineares de $E_1 \times \ldots \times E_m$ em F. Se $E_1 = \cdots = E_m = E$ escreveremos apenas $L_a(^m E; F)$.

Se $E_1, \ldots, E_m$ são espaços normados sobre $\mathbb{K}$, então $E_1 \times \ldots \times E_m$ também torna-se um espaço normado se considerarmos qualquer uma das seguintes normas

$$\begin{aligned}
\| x \|_\infty &= \max_{1 \le i \le m} \| x_i \|_{E_i} \\
\| x \|_p &= \left(\| x_1 \|_{E_1}^p + \cdots + \| x_m \|_{E_m}^p \right)^{\frac{1}{p}}, \\
(1 \le p < \infty),
\end{aligned}$$

onde $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$. Tais normas são equivalentes e geram a topologia produto em $E_1 \times \ldots \times E_m$. A menos que se mencione algo, usaremos a primeira como norma em $E_1 \times \ldots \times E_m$ e escreveremos apenas $\|x\|$.

Lembremos que B_E denota a bola unitária de E, ou seja, $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$.

A seguir, demonstraremos um teorema que será bastante útil para o que faremos mais a frente, ele exibe algumas equivalências sobre a continuidade de uma aplicação multilinear:

Teorema 2. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Se $E_1, E_2, \ldots, E_m$ e F são espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ uma aplicação multilinear, então são equivalentes:*

(a) A é contínua;

(b) A é contínua na origem;

(c) existe uma constante $M > 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq M$ para qualquer $(x_1, \ldots, x_m) \in B_{E_1 \times \ldots \times E_m}$;

(d) existe uma constante $M > 0$ tal que $\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_m\|$ para qualquer $(x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$.

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Como A é contínua, em particular, será contínua na origem.

(b) $\Rightarrow$ (c) Como A é contínua na origem, dado $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in E_1 \times \cdots \times E_m$, com $\|x\|_\infty \leq \delta$, temos que $\|A(x)\| \leq 1$.

Seja $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$ tal que $\|(x_1, \ldots, x_m)\| \leq 1$, assim $\|(\frac{\delta}{2}x_1, \ldots, \frac{\delta}{2}x_m)\| \leq \delta$ implica $\|A(\frac{\delta}{2}x_1, \ldots, \frac{\delta}{2}x_m)\| \leq 1$, ou seja,

$$\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \frac{2^m}{\delta^m}.$$

Basta então tomar $M = \frac{2^m}{\delta^m}$.

(c) $\Rightarrow$ (d) Seja $x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$ tal que $x_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Temos então que $(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_m}{\|x_m\|})$ tem norma igual a 1. Logo, $\|A(\frac{x_1}{\|x_1\|}, \ldots, \frac{x_m}{\|x_m\|}) \leq M$, ou seja,

$$\|A(x_1, \cdots, x_m)\| \leq M\|x_1\| \cdots \|x_m\|.$$

Se $x_i = 0$ para algum $i = 1, \ldots, m$, temos que $A(x_1, \cdots, 0, \cdots, x_m) = 0$, e portanto a desigualdade continua válida.

(c) $\Rightarrow$ (a) Sejam $a = (a_1, \ldots, a_m), x = (x_1, \ldots, x_m) \in E_1 \times \ldots \times E_m$. Supondo $\|x\|_1, \|a\|_1 < r$ temos que $\|x_i\| < r$ e $\|a_i\| < r$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Nessas condições, provemos que A é uniformemente contínua. Considere

$$\begin{aligned} A(x) - A(a) &= A(x_1 - a_1, x_2, \ldots, x_m) \\ &\quad + A(a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_m) \\ &\quad + \cdots + A(a_1, \ldots, a_{m-1}, x_m - a_m). \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \|A(x) - A(a)\| &\leq \|A(x_1 - a_1, x_2, \ldots, x_m)\| + \\ &\quad \|A(a_1, x_2 - a_2, \ldots, x_m)\| + \cdots + \\ &\quad \|A(a_1, \ldots, a_{m-1}, x_m - a_m)\| \\ &\leq M\|x_1 - a_1\|\|x_2\| \ldots \|x_m\| + \\ &\quad M\|a_1\|\|x_2 - a_2\| \cdots \|x_k\| \\ &\quad + \cdots + M\|a_1\| \ldots \|a_{k-1}\|\|x_k - a_k\| \\ &\leq Mr^{m-1}(\|x_1 - a_1\| + \cdots + \|x_k - a_k\|) \\ &\leq Mr^{m-1}\|x - a\|_1. \end{aligned}$$

Logo, A é uniformemente contínua sobre limitados e portanto contínua.

□

Observação 3. Na demonstração do teorema anterior, ao contrário do que ocorre no caso linear, não mostramos que uma aplicação m-linear é uniformemente contínua. Na verdade, nenhuma aplicação m-linear, $m \geq 2$, é uniformemente contínua, a menos que seja a aplicação nula: De fato, seja $A \not\equiv 0$ m-linear. Então existe $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tal que $\|A(x_1, x_2, \ldots, x_m)\| > r > 0$. Cada x_i é então não nulo. Se $\varepsilon = r$, para qualquer $\delta > 0$, podemos escolher $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $0 < |\lambda| < \frac{\delta}{\|x_1\|}$, ou seja, $\|\lambda x_1\| < \delta$. Com isso,

$$\|(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_m) - (x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_m)\| = \|\lambda x_1\|$$

é menor que δ. Mas

$$\begin{aligned} & \|A(x_1 + \lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_m) - A(x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_m)\| = \\ = \ & \|A(\lambda x_1, \frac{x_2}{\lambda}, \ldots, x_m)\| \\ = \ & \|A(x_1, x_2, \ldots, x_m)\| > r. \end{aligned}$$

Logo, A não é uniformemente contínua.

Denotemos por $L(E_1, \ldots, E_m; F)$ o subespaço vetorial de $L_a(E_1, \ldots, E_m; F)$ de todas as aplicações m-lineares contínuas de $E_1 \times \ldots \times E_m$ em F.

Definimos a multilinearidade de uma aplicação em termos de suas variáveis. Apesar disso, uma multilinear pode ser contínua em cada variável separadamente sem ser contínua, como mostra o exemplo:

Exemplo 4. *Seja* $E = \mathfrak{C}_{L_1}([0,1])$*, o espaço vetorial das funções contínuas de* $[0,1]$ *em* $\mathbb{R}$ *munido da norma* $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$*. A aplicação* $B \in L_a(^2E)$ *definida por* $B(x,y) = \int_0^1 x(t)y(t)dt$ *é separadamente contínua, mas não é contínua.*

Vejamos primeiro que B é separadamente contínua. Para cada x de E

fixo, temos

$$\begin{aligned} \mid B(x,y) \mid &\leq \int_0^1 \mid x(t) \mid\mid y(t) \mid dt \\ &\leq \int_0^1 \|x\|_\infty \mid y(t) \mid dt \\ &= \|x\|_\infty \int_0^1 \mid y(t) \mid dt = \|x\|_\infty \|y\|_1, \end{aligned}$$

ou seja, é contínua na segunda váriavel. De maneira análoga mostra-se que B é contínua na primeira variável. Assim, B é contínua separadamente. Para verificarmos que B não é contínua, considere a sequência

$$x_n = \begin{cases} n - n^3 t & , \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{n^2} \\ 0 & , \text{ se } \frac{1}{n^2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Vemos então que

$$\|x_n\|_1 = \int_0^{\frac{1}{n^2}} \mid n - n^3 t \mid dt = \int_0^{\frac{1}{n^2}} n - n^3 t \; dt = \frac{1}{2n}.$$

Portanto, $(x_n, x_n) \to 0$. Mas

$$B(x_n, x_n) = \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - n^3 t)^2 dt = \frac{1}{3},$$

que não converge para zero.

Entretanto, se os espaços forem de Banach, a continuidade em cada variável será uma condição suficiente para garantir a continuidade da aplicação, esse é exatamente o conteúdo do próximo teorema. Mas antes, lembremos o que diz o Princípio da Limitação Uniforme.

Teorema 5. *(Princípio da Limitação Uniforme) Seja $\mathcal{G}$ uma família não vazia de operadores lineares contínuos de X em Y, com X espaço de Banach e Y espaço normado, tal que para cada $x \in X$ $\{\|T(x)\| : T \in \mathcal{G}\}$ é limitado, então $\{\|T\| : T \in \mathcal{G}\}$ é limitado.*

Demonstração. Ver [3]. $\square$

Teorema 6. *Sejam E_1, E_2, $\ldots$, E_m espaços de Banach e F um espaço normado. Então, $A \in L_a(E_1, \ldots, E_m; F)$ é contínua se, e somente se, é contínua em cada variável.*

Demonstração. Se A é contínua, então A é contínua em cada variável, pois as funções $x_i \to A(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)$ são restrições de A ao conjunto $\{x_1\} \times \ldots \times E_i \times \ldots \times \{x_m\}$.

Por outro lado, seja $A : E_1 \times E_2 \to F$ bilinear e contínua em cada variável separadamente. Então, para cada y de E_2, a função definida por $A_y(x) = A(x, y)$ é linear e contínua. Analogamente, para cada x de E_1, a função definida por $A_x(y) = A(x, y)$ é linear e contínua, e portanto, temos que

$$\|A(x, y)\| = \|A_x(y)\| \leq M_x \|y\|,$$

para todo y de E_2. Em particilar, se $\|y\| \leq 1$ temos

$$\|A_y(x)\| = \|A_x(y)\| \leq M_x.$$

Considere a família

$$\mathcal{G} = \{A_y : y \in B_{E_2}\}.$$

Então,

$$\|A_y(x)\| \leq M_x, \ \forall \ A_y \in \mathcal{G}.$$

Pelo Teorema da Limitação Uniforme, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|A_y\| \leq M, \ \forall A_y \in \mathcal{G}.$$

Então, para todo $x \in E_1$ e $y \in E_2$, com $\|x\| \leq 1$ e $\|y\| \leq 1$ temos

$$\|A(x, y)\| = \|A_y(x)\| \leq \|A_y\| \leq M,$$

assim, para todo (x, y) de $E_1 \times E_2$, $\|A(x, y)\| \leq M\|x\|\|y\|$. Pelo teorema 2 A é contínua.

Suponha agora que toda aplicação $(m-1)$-linear contínua separadamente seja contínua. Considere A uma aplicação m-linear contínua separadamente.

Para cada x_m fixado, defina

$$\begin{array}{rcl} A_{x_m} : E_1 \times \ldots \times E_{m-1} & \to & F \\ (x_1, \ldots, x_{m-1}) & \mapsto & A(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m) \end{array}$$

que é $(m-1)$-linear e contínua separadamente, e portanto, contínua. Então existe M_{x_m} tal que

$$\begin{array}{rcl} \|A(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)\| & = & \|A_{x_m}(x_1, \ldots, x_{m-1})\| \\ & \leq & M_{x_m} \|x_1\| \cdots \|x_{m-1}\|. \end{array}$$

Se $\|x_i\| \leq 1$, $i < m$, temos

$$\|A(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)\| \leq M_{x_m}.$$

Definindo a família

$$\mathcal{G} = \{A_{x_1, \cdots, x_{m-1}} : x_i \in B_{E_i},\ i < m\},$$

teremos que, para cada x_m de E_m,

$$\|A_{x_1, \cdots, x_{m-1}}(x_m)\| = \|A(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)\| \leq M_{x_m},$$

e novamente pelo Teorema da Limitação Uniforme, existe uma constante M tal que

$$\|A_{x_1, \cdots, x_{m-1}}\| \leq M,\ \forall A_{x_1, \cdots, x_{m-1}} \in \mathcal{G}$$

e portanto, para cada $x_i \in E_i$ de norma menor ou igual a 1 temos que

$$\|A(x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)\| \leq M.$$

Portanto, novamente pelo teorema 2 A é contínua. $\square$

Para provarmos um corolário do teorema anterior, necessitaremos dos seguintes resultados:

Proposição 7. *Todo espaço normado de dimensão finita é um espaço de Banach.*

Proposição 8. *Toda aplicação linear definida em um espaço normado de dimensão finita é contínua.*

Para ver uma demonstração desses resultados, recomendamos consultar [3].

Corolário 9. *Uma multilinear que está definida em um produto de espaços de dimensão finita é sempre contínua.*

Demonstração. Seja A uma aplicação multilinear definida em um produto de espaços de dimensão finita. Como todo espaço de dimensão finita é um espaço de Banach (Proposição 7), pelo Teorema 6 basta mostrar que A é contínua em cada variável. Mas toda aplicação linear definida em um espaço de dimensão finita é contínua (Proposição 8). Logo, A é contínua em cada variável. $\square$

3 Resultado principal

Passemos finalmente a discutir o resultado principal deste trabalho.

Teorema 10. *Se $E_1, E_2, \ldots, E_m$ e F são espaços de Banach e $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ é uma aplicação multilinear com gráfico $G(A)$ fechado, então A é contínua.*

Demonstração. Vamos mostrar que A é contínua em cada variável separadamente. A conclusão seguirá do Teorema 6. Seja então $i \in \{1, \ldots, m\}$ fixo.

Para cada $1 \leq j \leq m$, $j \neq i$, fixe $a_j \in E_j$. Denotemos por $E := E_1 \times \ldots \times E_m$ e $J := \{a_1\} \times \ldots \times E_i \times \ldots \times \{a_m\} \times F$.

Considere a aplicação $A_i : x_i \in E_i \mapsto A(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_m) \in F$. Pela multilinearidade de A, temos que cada A_i é uma aplicação linear. Defina

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & J & \longrightarrow & E_i \times F \\ & (a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) & \mapsto & (x_i, y) \end{array}$$

Sejam

$(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y)$, $(a_1, \ldots, \widetilde{x_i}, \ldots, a_m, \widetilde{y}) \in J$ e

$$\begin{aligned} &\|\varphi(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) - \varphi(a_1, \ldots, \widetilde{x_i}, \ldots, a_m, \widetilde{y})\| \\ &= \|(x_i, y) - (\widetilde{x_i}, \widetilde{y})\| = \max\{\|x_i - \widetilde{x_i}\|, \|y - \widetilde{y}\|\} \\ &= \|(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) - (a_1, \ldots, \widetilde{x_i}, \ldots, a_m, \widetilde{y})\| \end{aligned}$$

Logo, φ é uma imersão isométrica e portanto injetora e contínua.

Por outro lado, dado $(x_i, y) \in E_i \times F$, se tomarmos $(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) \in J$, temos que $\varphi(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) = (x_i, y)$ e portanto φ é sobrejetora. Então φ é uma isometria sobrejetora e consequêntemente um homeomorfismo, pois a inversa de uma isometria é também isometria e portanto contínua, ver [6].

Por hipótese $G(A)$ é fechado em $E \times F$. J é fechado em $E \times F$, pois é produto de fechados. Como intersecção finita de fechados é fechado, segue que $G(A) \cap J$ é fechado. Do fato de φ ser homeomorfismo implica que $\varphi(G(A) \cap J)$ é fechado em $E_i \times F$. Provemos agora que $\varphi(G(A) \cap J) = G(A_i)$.

Seja $(v, w) \in G(A_i) = \{(x_i, y) \in E_i \times F : A_i(x_i) = y\}$. Então

$A_i(v) = w$ e pela definição de A_i temos que $A(a_1, \ldots, v, \ldots, a_m) = w$. Logo, $(a_1, \ldots, v, \ldots, a_m, w) \in G(A)$ e temos também que $(a_1, \ldots, v, \ldots, a_m, w) \in J$ portanto, $(a_1, \ldots, v, \ldots, a_m, w) \in G(A) \cap J$. Mas $\varphi(a_1, \ldots, v, \ldots, a_m, w) = (v, w)$, consequentemente $G(A_i) \subseteq \varphi(G(A) \cap J)$.

Seja agora $(v, w) \in \varphi(G(A) \cap J))$. Então existe $(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) \in G(A) \cap J$ com $y = A(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m)$ tal que $\varphi(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) = (v, w)$, mas $\varphi(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_m, y) = (x_i, y)$ e portanto $w = A(a_1, \ldots, v, \ldots, a_m) = A_i(v)$ e consequentemente $(v, w) \in (A_i)$, ou seja, $\varphi(G(A) \cap J) \subseteq G(A_i)$.

Verificada as inclusões acima, temos então que $\varphi(G(A) \cap J) = G(A_i)$. Logo $G(A_i)$ é fechado em $E_i \times F$. Pelo Teorema do Gráfico Fechado para transformações lineares, obtemos que A_i é contínua. Como o i fixado é arbitrário, temos que A é contínua em cada variável e portanto contínua pelo Teorema 6. $\square$

4 Considerações finais

Achamos relevante colocarmos neste momento uma discussão que foi levantada no artigo estudado a respeito do título de um outro artigo, o qual nos leva a entender ser possível apresentar um contra-exemplo para o resultado da seção anterior.

Consideremos as seguintes afirmações:

(1) Se E e F são espaços de Banach e $T : E \to F$ é uma transformação linear com gráfico fechado, então T é contínua (Teorema do Gráfico Fechado)

(2) Se E e F são espaços de Banach e $T : E \to F$ é uma transformação

linear, sobrejetora e contínua, então existe uma constante $M > 0$ tal que para qualquer $y \in F$ com $\|y\| = 1$, existe $x \in E$ tal que $T(x) = y$ e $\|x\| \leq M$

As afirmações acima são *equivalentes*[2] no contexto de Espaços de Banach. Por essa razão que as vezes (2) também é chamada de Teorema do Gráfico Fechado (ver por exemplo as notas de aula [6]).

As afirmações abaixo são versões naturais de (1) e (2) para aplicações bilineares:

(1') Se E_1, E_2 e F são espaços de Banach e $A : E_1 \times E_2 \to F$ é uma aplicação bilinear com gráfico fechado, então A é contínua

(2') Se E_1, E_2 e F são espaços de Banach e $A : E_1 \times E_2 \to F$ é uma aplicação bilinear, sobrejetora e contínua, então existe uma constante $M > 0$ tal que para qualquer $y \in F$ com $\|y\| = 1$, existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tal que $A(x_1, x_2) = y$ e $\|x_1\|\|x_2\| \leq M$

O artigo *A counterexample to the closed graph theorem for bilinear maps*, de P. J. Cohen [1], como mencionamos acima, sugere em seu título que teria dado um contra-exemplo de (1) para o caso bilinear. Porém, o que de fato é apresentado no artigo de Cohen é um contra-exemplo de (2').

Isso,juntamente com o resultado da seção anterior, nos mostra que, ao contrário do caso linear, as afirmações (1') e (2') não são equivalentes, pois, como vimos, o Teorema do Gráfico fechado para multilineares de fato é válido.

[2] Aqui o termo *equivalentes* significa que é possível provar uma afirmação a partir da outra, e vice e versa, de uma maneira simples

Referências

[1] COHEN, P.J.: A counterexample to the closed graph theorem for bilinear maps, J. Func. Anal. 16 pag. 235–240, (1974).

[2] FERNANDEZ, C.S.: The closed graph theorem for multilinear mappings nº 2, Internat. J. Math. & Math. Sci. 19 pag. 407–408, (1996).

[3] KREIZIG, E.: Introductory Functional Analysis with Applications , New York, Toronto, Singapure, John Wiley and Sons, (1978).

[4] LIMA, E.L.: Espaços Métricos, Rio de Janeiro, IMPA (2003).

[5] PELLEGRINI, L.: Um Teorema de Hahn-Banach para polinômios homogêneos, IME-USP, Dissertação, (2001).

[6] PELLEGRINI, L.: Notas de aula do curso MAT5721 - Introdução à Análise Funcional, IME-USP, (http://www.ime.usp.br/˜leonardo).