A noção de diferencial em espaços normados

Glaucio Fabiano da Silva[1] e
Leonardo Pellegrini (Orientador)[2]

[1] *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo (USP), Brasil - Bolsista do programa Ensinar com Pesquisa 2008*
glaucio.matema@usp.br
[2] *Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo (USP), Brasil*
leonardo@ime.usp.br

1. Introdução

Apresentaremos neste trabalho uma demonstração elementar de um resultado envolvendo a noção de diferenciabilidade de funções em espaços normados. Dados E e F espaços normados sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, A um subconjunto aberto conexo não vazio de E e uma função $f : A \to F$ diferenciável em A com $df = 0$ provaremos, utilizando apenas a definição de diferencial, que f é constante.

Observemos que a demonstração usualmente encontrada na literatura sobre diferencial em espaços normados de dimensão infinita usa a Desigualdade de Lagrange (cf. [5]).

No que será apresentado, indicaremos por E e F espaços normados sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. A indicará um subconjunto aberto não vazio de E e $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto das aplicações lineares contínuas de E em F.

2. A diferencial em espaços normados

Definição 1. *Seja A um subconjunto aberto não vazio de E. Uma função $f : A \to F$ diz - se diferenciável no ponto $x_0 \in A$ se existir uma aplicação linear contínua T em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0.$$

Proposição 1. *A transformação $T \in \mathcal{L}(E, F)$ da definição acima, caso exista, é única.*

Demonstração. Suponhamos que exista T_1, $T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfazendo a definição acima. Seja $S_E = \{x \in E : \| x \|= 1\}$ e tomamos $v \in S_E$ fixado. Então temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\| f(x_0 + \lambda v) - f(x_0) - T_1(\lambda v) \|}{\| \lambda v \|} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\| f(x_0 + \lambda v) - f(x_0) - T_1(\lambda v) \|}{|\lambda|} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \| \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda} - T_1(v) \| \end{aligned}$$

Então

$$T_1(v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda},$$

para todo $v \in S_E$.

Analogamente obtemos

$$T_2(v) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda v) - f(x_0)}{\lambda},$$

para todo $v \in S_E$.

Logo

$$T_1(v) = T_2(v), \ \forall v \in S_E.$$

Assim, se $v \neq 0$ temos que $T_1(\frac{v}{\|v\|}) = T_2(\frac{v}{\|v\|})$ e portanto, pela linearidade das aplicações $T_1(v) = T_2(v)$, para todo vetor $v \neq 0$. Como $T_1(0) = T_2(0) = 0$, segue que $T_1 = T_2$. □

A aplicação T da definição chama-se *diferencial de f em x_0* e é denotada por $df(x_0)$.

Dizemos que uma função $f : A \to F$ é *diferenciável* se f for diferenciável em todos os pontos de A. Neste caso, a diferencial de f em A é a função $df : x \in A \mapsto df(x) \in \mathcal{L}(E, F)$.

Proposição 2. *Seja $f : A \to F$ uma função diferenciável em $x_0 \in A$, então f é contínua em x_0.*

Demonstração. Como f é diferenciável em x_0, existe uma aplicação T em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} = 0$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} \| x - x_0 \| &= \\ \lim_{x \to x_0} \| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \| &= 0 \end{aligned}$$

Chamemos essa ultima linha de $(*)$.

Pela linearidade de T temos que

$$\begin{array}{rcl} 0 & \leq & \| f(x) - f(x_0) \| \ \ (**) \ \text{ e} \\ (**) & \leq & \| f(x) - f(x_0) - T(x - x_0) \| \ + \\ & + & \| T(x) - T(x_0) \|, \ \text{para todo } x \text{ e } x_0 \ \in \ A. \end{array}$$

Da continuidade de T e de $(*)$ segue que o lado direito da ultima desigualdade acima tende a zero quando $x \to x_0$ e portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \| f(x) - f(x_0) \| = 0,$$

o que mostra que f é contínua em x_0. □

Daremos a seguir alguns exemplos de funções diferenciáveis:

Exemplo 1. *Seja $a \in F$. Então a função constante*

$$f : x \in E \mapsto a \in F$$

tem diferencial igual a 0 em E. De fato, como f é constante, então dado $x_0 \in E$, $f(x) = f(x_0)$, para todo x em E. Portanto

$$f(x) - f(x_0) - 0(x - x_0) = 0,$$

onde o 0 do lado esquerdo da igualdade denota a transformação nula de $\mathcal{L}(E, F)$. Assim

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - 0(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} & = & \\ \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{0}{\| x - x_0 \|} & = & 0 \end{array}$$

isto é, encontramos uma transformação linear contínua $0 : E \to F$ que satisfaz à condição da definição de diferenciabilidade. Desta forma tem-se que f é diferenciável em x_0 e que $df(x_0) = 0$ para todo $x_0 \in E$.

Exemplo 2. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então T é diferenciável em E e dT é a função constante $x \in E \mapsto T \in \mathcal{L}(E, F)$. De fato, pela linearidade de T temos que

$$T(x) - T(x_0) - T(x - x_0) = 0$$

para todo x e x_0 em E. Portanto,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\| T(x) - T(x_0) - T(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} & = & \\ \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{0}{\| x - x_0 \|} & = & 0 \end{array}$$

Assim, encontramos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ que satisfaz a condição de diferenciabilidade. Portanto, T é diferenciável em x_0 e sua diferencial neste ponto é $df(x_0) = T$.

Observação 1. Se $B \subset A$ é um aberto não vazio e f for diferenciável em A, então sua restrição $f|_B$ será diferenciável em B e $df|_B(x_0) = df(x_0)$, $x_0 \in B$.

Exemplo 3. Seja $r \in \mathbb{R}$ tal que $r > 0$. Considere a função

$$\begin{array}{rccc} f : & B_1(0) & \to & E \\ & x & \mapsto & rx \end{array}$$

onde $B_1(0) = \{x \in E : \| x \| < 1\}$. Portanto, segue da observação acima que f é diferenciável em $B_1(0)$.

Exemplo 4. Seja $x_1 \in E$ e considere a função

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \to & E \\ & x & \mapsto & x + x_1 \end{array}$$

temos que f é diferenciável em E e $df(x_0) = id_E$, para todo $x_0 \in E$, onde id_E denota a função identidade em E. De fato

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\| f(x) - f(x_0) - id_E(x - x_0) \|}{\| x - x_0 \|} & = & \\ \displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\| x + x_1 - x_0 - x_1 - x + x_0 \|}{\| x - x_0 \|} & = & 0. \end{array}$$

3. Resultado principal

Num primeiro curso de cálculo é introduzido o conceito de derivada de funções de uma variável real e suas propriedades, dentre as quais : se $f : J \to \mathbb{R}$ é constante, então sua derivada é nula em J, onde J é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$. Para se demonstrar a recíproca desta propriedade utiliza-se o Teorema do Valor Médio (cf. [3]). Daremos a seguir uma demonstração da recíproca deste resultado para uma bola aberta de raio 1 e centrada na origem. Em seguida provaremos o mesmo resultado para uma bola de centro e raio qualquer e finalmente para um aberto conexo não vazio qualquer de E.

Proposição 3. *Se $f : B_1(0) \to F$ é uma função com $df = 0$ em $B_1(0)$, então f é constante.*

Demonstração. Considere primeiro $f(0) = 0$. Suponha, por absurdo, que f não é constante em $B_1(0)$. Mostremos que $df \not\equiv 0$ em $B_1(0)$, ou seja, que existe $x_0 \in B_1(0)$ tal que $df(x_0) \not\equiv 0$ em E. Como f não é constante, existe $0 \neq v \in B_1(0)$ com $f(v) \neq 0$.

Seja M $= \frac{\|f(v)\|}{\|v\|} > 0$. Assim $\| f(v) \| = M \| v \|$.

Defina:

$$I = \{\ t \in\ ]0,1] : \| f(tv) \| \geq M \| tv \|\ \}$$

Observe que $I \neq \emptyset$ e limitado, pois $1 \in I$ e $t \in\ ]0,1]$. Logo I possui ínfimo. Seja $a = inf I$. Como $0 \leq a \leq 1$ e $v \in B_1(0)$ segue que $av \in B_1(0)$. Pela definição de ínfimo existe $(t_n)_n$ seqüência positiva em I tal que: $t_n \longrightarrow a$. Como f e $\| \ . \ \|$ são funções contínuas temos:

$$f(t_n v) \longrightarrow f(av) \quad \text{e} \quad \| f(t_n v) \| \longrightarrow \| f(av) \|$$

e portanto

$$\| f(av) \| \geq M \| av \| \tag{1}$$

Passemos então a considerar os seguintes casos:

Primeiro caso: $a = 0$.
Pela definição de ínfimo existe $(t_n)_n$ em I tal que $t_n \to a$. Então

$$\| f(t_n v) \| \geq M \| t_n v \| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim $df(0)$ não é identicamente nula, pois caso contrário, teríamos que:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x\to 0} \frac{\| f(x) - \overbrace{f(0)}^{=0} - \overbrace{df(0)}^{=0}(x-0) \|}{\| x - 0 \|} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\| f(x) \|}{\| x \|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\| f(t_n v) \|}{\| t_n v \|} \geq M \end{aligned}$$

O que é um absurdo!

Segundo caso: $a > 0$.
Seja $0 < b < a$ e suponhamos

$$\| f(bv) - f(av) \| \leq M \| bv - av \| \tag{2}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} \| f(av) \| &= \| f(av) - f(bv) + f(bv) \| \\ &\leq \| f(bv) - f(av) \| + \| f(bv) \|, \end{aligned}$$

e assim, por (1) e (2):

$$\begin{aligned} \| f(bv) \| &\geq \| f(av) \| - \| f(bv) - f(av) \| \\ &\geq M \| av \| - M \| bv - av \| \\ &= M \| av \| - M|b-a| \| v \| \\ &= M \| av \| - M(a-b) \| v \| \\ &= M \| av \| - M \| av \| + M \| bv \| \\ &= M \| bv \| . \end{aligned}$$

Logo

$$\| f(bv) \| \geq M \| bv \|$$

o que contradiz o fato de $a = inf I$. Portanto, para $0 < b < a$ tem-se:

$$\frac{\| f(bv) - f(av) \|}{\| bv - av \|} > M \tag{3}$$

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ tal que $a - \frac{1}{n} > 0$, seja $b_n = a - \frac{1}{n}$. Então $0 < b_n < a$ e por (3):

$$\frac{\| f(b_n v) - f(av) \|}{\| b_n v - av \|} > M$$

Para $n \to +\infty$, temos que $b_n \longrightarrow a$ e $b_n v \longrightarrow av$.
Logo, $df(av)$ não se anula em E, pois caso contrário

$$0 = \lim_{b_n \to a} \frac{\| f(b_n v) - f(av) \|}{\| b_n v - av \|} \geq M$$

o que é um absurdo.
Para o caso em que $f(0) \neq 0$ defina $g(x) = f(x) - f(0)$, $x \in B_1(0)$, como $g(0) = 0$ e $df = dg$ segue pelo que provamos acima que $g \equiv 0$ e portanto $f(x) = f(0)$. $\square$

Para provarmos a proposição anterior tendo como domínio da f uma bola de centro e raio qualquer precisaremos da seguinte

Proposição 4. *Sejam E, F, G espaços normados e $A \subset E, B \subset F$ abertos não vazios. Sejam $f : A \longrightarrow F$ e $g : B \longrightarrow G$ funções tais que $f(A) \subset B$. Se f é diferenciável em um ponto $p \in A$ e g é diferenciável em $f(p)$, então $g \circ f$ é diferenciável em p e*

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$$

Demonstração. De g ser diferenciável em $f(p)$ temos:

$$r(y) = g(y) - g(f(p)) - dg(f(p))(y - f(p))$$

com

$$\lim_{y \to f(p)} \frac{r(y)}{\| y - f(p) \|} = 0 \tag{4}$$

onde

$$g(f(x)) = g(f(p)) + dg(f(p))(f(x) - f(p)) + r(f(x)).$$

De f ser diferenciável em p temos

$$s(x) = f(x) - f(p) - df(p)(x - p) \tag{5}$$

com

$$\lim_{x \to p} \frac{s(x)}{\| x - p \|} = 0. \tag{6}$$

Assim

$$dg(f(p))(df(p)(x-p)+s(x))+r(f(x)) = (g\circ f)(x)-(g\circ f)(p)$$

e

$$(g\circ f)(x)-(g\circ f)(p)-dg(f(p))df(p)(x-p) = dg(f(p))df(p)s(x)+r(f(x))$$

Para provarmos que $(g\circ f)$ é diferenciável em p devemos mostrar que

$$\lim_{x\to p}\frac{\| (g\circ f)(x)-(g\circ f)(p)-dg(f(p))df(p)(x-p)\|}{\| x-p\|}$$

é igual a zero. Para isso, basta provarmos que

$$\lim_{x\to p}\frac{\| dg(f(p))s(x)+r(f(x))\|}{\| x-p\|}=0.$$

Usando a desigualdade triangular, obtemos que é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{x\to p}\| dg(f(p))\frac{s(x)}{\| x-p\|}\| + \lim_{x\to p}\frac{\| r(f(x))\|}{\| x-p\|}=0.$$

Como $dg(f(p))$ é linear temos que $dg(f(p))(0)=0$. Logo, como é contínua e por (6)

$$\lim_{x\to p}\left[dg(f(p))\frac{s(x)}{\| x-p\|}\right]=0.$$

Desta forma basta provarmos que

$$\lim_{x\to p}\frac{\| r(f(x))\|}{\| x-p\|}=0.$$

Utilizando a definição de limite para (4) temos que para todo $\varepsilon>0$, existe $\rho>0$ tal que

$$0<\| y-f(p)\|<\rho \implies \| \frac{\| r(y)\|}{\| y-f(p)\|}-0\| < \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Assim,

$$0<\| y-f(p)\|<\rho \implies \| r(y)\| < \frac{\varepsilon}{M+1}\| y-f(p)\|,$$

onde $M=\| df(p)\|$.

Da continuidade de f em p temos que existe $\delta>0$ tal que

$$\| x-p\|<\delta \implies \| f(x)-f(p)\|<\rho$$

Então

$$\begin{aligned} 0 <\| x-p\| &< \delta \implies \\ \implies \| r(f(x))\| &< \frac{\varepsilon}{M+1}\| f(x)-f(p)\| \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade por $\| x-p\|$ obtemos

$$\frac{\| r(f(x))\|}{\| x-p\|}<\frac{\varepsilon}{M+1}\frac{\| f(x)-f(p)\|}{\| x-p\|} \qquad (*)$$

Usando novamente a definição de limite em (6) temos que existe $\delta_1>0$.

$$0<\| x-p\|<\delta_1 \implies \frac{\| s(x)\|}{\| x-p\|}<1$$

e substituindo (5) em (*) temos que, se $\delta_0 = min\{\delta,\delta_1\}$ e $0<\| x-p\|<\delta_0$

$$\begin{aligned}\frac{\| r(f(x))\|}{\| x-p\|} &< \frac{\varepsilon}{M+1}\frac{\| df(p)(x-p)+s(x)\|}{\| x-p\|}\\ &\leq \frac{\varepsilon}{M+1}\left[M + \| \frac{s(x)}{\| x-p\|}\|\right] < \varepsilon\end{aligned}$$

Usamos acima a desigualdade triangular.

Portanto

$$0<\| x-p\|<\delta_0 \implies \| \frac{r(f(x))}{x-p} - 0\|<\varepsilon$$

ou seja,

$$\lim_{x\to p}\frac{\| r(f(x))\|}{\| x-p\|}=0.$$

□

A proposição acima é usualmente denominada regra da cadeia e iremos fazer uso dela para demonstrarmos a seguinte

Proposição 5. *Seja $f: B_r(x_0)\to F$ com $df=0$, $r>0$. Então f é constante.*

Demonstração. Seja $k: B_1(0)\to F$ a função $k=f\circ g\circ h$, onde

$$\begin{array}{rccc} h: & B_1(0) & \longrightarrow & B_r(0)\subset E\\ & x & \longmapsto & rx\end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & B_r(0) & \longrightarrow & B_r(x_0)\subset E\\ & x & \longmapsto & x+x_0\end{array}$$

Como f, g e h são diferenciáveis segue, da regra da cadeia que:

$$\begin{aligned} dk(x_0) &= d(f\circ g\circ h)(x_0)\\ &= d(f\circ g)(h(x_0))dh(x_0)\\ &= df(g(h(x_0)))dg(h(x_0))dh(x_0)\end{aligned}$$

Do fato de $df=0$ segue que $dk=0$, para todo $x\in B_1(0)$ e pela proposição 3, k é constante e portanto, f é constante. □

Para concluirmos, provaremos para o caso mais geral em que A é um aberto conexo não vazio qualquer de E.

Proposição 6. *Seja A um aberto conexo não vazio qualquer de E e $f : A \to F$ uma função com $df = 0$ em A. Então f é constante em A.*

Demonstração. Fixemos $w \in A$ e sejam

$$U = \{\ x \in A : f(x) = f(w)\ \}$$

e

$$V = \{\ x \in A : f(x) \neq f(w)\ \}$$

Notemos que $U \cap V = \emptyset$ e $U \cup V = A$ e provemos que U e V são abertos:

Seja $x_1 \in U$. Do fato de A ser aberto temos que existe $r_1 > 0$ tal que $B_{r_1}(x_1) \subset A$. Pela proposição 5, f é constante em $B_{r_1}(x_1)$, o que implica $f(x) = f(x_1) = f(w)$, $\forall\, x \in B_{r_1}(x_1)$. Logo, $B_{r_1}(x_1) \subset U$.

Seja $x_2 \in V$. Do fato de A ser aberto temos que existe $r_2 > 0$ tal que $B_{r_2}(x_2) \subset A$. Novamente pela proposição 5, f é constante em $B_{r_2}(x_2)$ e então $f(x) = f(x_2) \neq f(w)$, $\forall\, x \in B_{r_2}(x_2)$. Logo, $B_{r_2}(x_2) \subset V$.

Da conexidade de A segue que U ou V deve ser vazio. Como $w \in U$, $U \neq \emptyset$. Logo $V = \emptyset$ e consequentemente $U = A$ e f é constante em A.

$\square$

Referências

[1] R. G. BARTLE and D. R. SHERBERT, *Introduction to Real Analysis*, Inc., John Wiley Sons, 1992.

[2] C.S. FERNANDEZ, *Uma demonstração elementar de um resultado básico sobre a noção de diferencial em espaços normados*, revista Matemática Universitária **42** (2007), 35–39.

[3] E.L. LIMA, *Curso de Análise, Vol. 1*, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.

[4] ———, *Espaços Métricos*, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[5] L. NACHBIN, *Introdução à Análise Funcional: Espaços de Banach e Cálculo Diferencial.*, Série de Matemática 17, Secretaria Geral da O.E.A., 1976.