MAT 334 - Análise Funcional - 2013
Segunda Prova

Todas as afirmações devem ser justificadas. Mesmo que a justificativa seja "Foi visto em aula", ou "Pelo exercício da lista"

Questão 1. Seja $(x_n)_n$ uma sequência em um espaço normado X tal que $\varphi(x_n)$ converge a zero para todo $\varphi \in X^*$. Defina $T : X^* \to c_0$ por $T(\varphi) = (\varphi(x_n))_n$. Mostre que T é limitada.

Questão 2. Considere uma aplicação linear T entre dois espaços de Banach X e Y com a seguinte propriedade: Para qualquer sequência $(x_n) \subset X$ que converge a zero e tal que $(Tx_n)_n$ é convergente, temos que $T(x_n)$ converge a zero. Prove que T é contínua.

Questão 3. Seja M e N dois subespaços fechados de um espaço de Banach $\big(X, ||\cdot||\big)$. Suponha que X seja soma direta de M e N (no sentido da Álgebra Linear).
(a) Prove que X é isomorfo a $\big(M \times N, |||\cdot|||\big)$ onde $|||(m,n)||| = \max\{\|m\|, \|n\|\}$.
(b) Mostre que X/M é isomorfo a N. Justifique suas afirmações.

Questão 4. Seja X um espaço normado e M um subespaço de X. Considere

$$M^\perp = \{\varphi \in X^* : \varphi|_M \equiv 0\}.$$

Mostre que a aplicação $T : X^*/M^\perp \to M^*$ dada por $T\big([x^*]\big) = x^*|_M$ é uma isometria de $X^*/M^\perp$ sobre M^*.