MAT 334 - Análise Funcional - 2013
Primeira Prova

Todas as afirmações devem ser justificadas.

Questão 1. Seja X um espaço normado. Prove que X é separável se, e somente se S_X é separável.

Questão 2. Seja $(a_n)_n \in \ell_\infty$ fixado. Mostre que $\varphi((x_n)_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n a_n$ define um funcional linear contínuo em ℓ_1. Calcule a norma de φ.

Questão 3. Sejam $X = \Big(C^1[0,1], |||\cdot|||\Big)$ e $Y = \Big(C^1[0,1], ||\cdot||\Big)$, onde

$$|||f||| = \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)| + |f'(x)|\} \quad \text{e} \quad ||f|| = \sup_{x \in [0,1]} \{|f(x)|\}.$$

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $f_n \in C^1[0,1]$ pondo $f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$. Mostre que a sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para zero (função nula) em Y mas não em X.
b) Mostre que a identidade de X em Y é contínua mas não é um isomorfismo.
c) Usando o item anterior, qual a relação entre as topologias induzidas por $|||\cdot|||$ e por $||\cdot||$? JUSTIFIQUE!

Questão 4. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. Para uma dada partição $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a,b]$ definimos a variação de f em relação a P por

$$var(f,P) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Dizemos que f é de variação limitada se

$$var(f) := \sup \{var(f,P) : P \text{ é uma partição de } [a,b]\}$$

é finito. Denotamos por $BV([a,b])$ o conjunto de todas as funções de variação limitada em $[a,b]$.
a) Mostre que $var(f) = 0 \Leftrightarrow f$ é constante.
b) $var(\cdot)$ é uma norma em $BV([a,b])$?
c) Mostre que $\|f\| = |f(0)| + var(f)$ define uma norma em $BV([a,b])$.
d) Mostre que $BV([a,b])$ é um espaço de Banach se munido da norma do item c). *Roteiro sugerido: Tome uma sequência de Cauchy em $BV([a,b])$. Mostre que ela converge pontualmente. Defina f usando os limites pontuais. Mostre que f é de variação limitada (use que sequências de Cauchy são limitadas e depois tome o supremo). Finalmente, mostre que a sequência converge para f na norma do item c).*