MAT334 - Análise Funcional - 2013

6ª Lista de exercícios

Espaços de Hilbert II

1. Seja $y = (y_n)_n \in \ell_\infty$. Defina $M_y : \ell_2 \to \ell_2$ por $M_y(x) = (x_n y_n)_n$. Mostre que M_y é limitado com $\|M_y\| = \|y\|$. Mostre ainda que $M_y^* = M_{\bar{y}}$.

2. Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $T : H \to H$ linear. Se $< Th, h >= 0$, $\forall h \in H$, mostre que $T \equiv 0$. O mesmo é válido para espaços reais?

3. Mostre que se M é um subespaço invariante por T (isto é, $T(M) \subset M$) então $M^\perp$ é invariante por T^*.

4. Mostre que se T é autoadjunto, então seus autovalores são reais.

5. Seja T é autoadjunto. Se μ e λ são autovalores distintos de T então os autoespaços correspondentes são ortogonais.

6. Mostre que um operador linear T em um espaço de Hilbert H que satisfaz $< Tx, y >=< x, Ty >, \forall x, y \in H$ é sempre limitado. *Sugestão: Teorema do Gráfico fechado*

7. Verifique que H é separável se, e só se, possui uma base enumerável (podendo ser finita).

8. Mostre que todo subespaço fechado de ℓ_2 ou tem dimensão finita, ou é isomorfo a ℓ_2.

9. Mostre que se H tem dimensão infinita então B_H não é compacta.