MAT334 - Análise Funcional - 2013

5ª lista de exercícios

Duais

1. Mostre que $\mathrm{Ker}T^* = (\mathrm{Im}T)^{\perp}$.

2. Considere c_0^* identificado da maneira usual com ℓ_1. Caracterize os elementos de c_0^* que atingem sua norma. Mostre que o conjunto de tais funcionais é denso em c_0^*. *Isso é um caso particular do Teorema de Bishop-Phelps que diz que se X um espaço de Banach, o conjuntos dos elementos de X^* que atingem a norma é denso em X.*

3. (a) Verique que a aplicação $T \mapsto T^*$ é uma imersão isométrica de $\mathcal{L}(X;Y)$ em $\mathcal{L}(Y^*;X^*)$.
(b) Mostre que não pode existir um isomorfismo de $\mathcal{L}(\mathbb{K};c_0)$ sobre $\mathcal{L}(c_0^*;\mathbb{K}^*)$. Conclua que a imersão do item (a) nem sempre é sobrejetora, ou seja, existem operadores entre duais que não são adjuntos de ninguém.

4. Sejam X e Y espaços normados.
(a) Dados $x^* \in X^*$ e $y \in Y$, mostre que a aplicação $T_{x^*;y} : X \to Y$ definida pela fórmula $T_{x^*;y}(x) = x^*(x)y$ é linear e contínua. Mostre ainda que $\|T_{x^*;y}\| = \|x^*\|\,\|y\|$.
(b) Se $X \neq \emptyset$, mostre que $\mathcal{L}(X;Y)$ contém um subespaço fechado isométrico a Y.
(c) Mostre que se $X \neq \emptyset$ então $\mathcal{L}(X;Y)$ é Banach se, e somente se, Y é Banach.

Espaços de Hilbert

5. Seja X um espaço com produto interno. Mostre que se $x \perp y$ então $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Vale a recíproca?

6. Seja X um espaço produto interno. Prove que se X é complexo, então
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i\ \| x+iy \|^2 - i\ \| x-iy \|^2\right).$$
No caso de X ser real,
$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2\right).$$

7. Um isomorfismo de espaços com produto interno é uma bijeção linear $T : X \to Y$ que satisfaz $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in X$. Mostre T é um isomorfismo de espaços com produto interno se, e somente se, T é uma isometria.

8. Considere c_{00} como subespaço de ℓ_2. Mostre que não existe a melhor aproximação de $x = (1/n) \in \ell_2$ em c_{00}. Qual o motivo?

9. Em ℓ_2 considere o subconjunto A formado pelas sequências unitárias canônicas. Mostre que não existe a melhor aproximação de $h = (-1/n) \in \ell_2$ no conjunto em A. Qual o motivo?

10. (a) Mostre que $Y = \{x \in l_2 \mid x = (x_i),\ x_{2i} = 0,\ i \in \mathbb{N}\}$ é um subespaço fechado de l_2 e determine $Y^{\perp}$.
    (b) Seja $Y = [e_1, ..., e_n] \subset l_2$, determine $Y^{\perp}$.

11. Seja M um subespaço fechado de um espaço de Hilbert H.
    (a) Se P_M é a projeção ortogonal de H em M mostre que $Id - P_M$ é a de H em $M^{\perp}$.
    (b) Mostre que $M^{\perp\perp} = M$.

12. Se A é um subconjunto de um espaço de Hilbert, mostre que $A^{\perp} = \overline{[A]}^{\perp}$. Mostre também que $A^{\perp\perp} = \overline{[A]}$.

13. Mostre que um subespaço M é denso em H se, e somente se, $M^{\perp} = \{0\}$.

14. Seja X um espaço produto interno. Considere $z \in X$ fixo. Seja $f : X \to \mathbb{K}$, dada por $f(x) =< x, z >$. Mostre que $f \in X^*$ e $\| f \| = \| z \|$.