MAT334 - Análise Funcional - 2013

4ª lista de exercícios

Extensão de Aplicações Lineares

1. Sejam X um espaço normado e Y um espaço de Banach. Se M um subespaço denso de X e $T \in \mathcal{L}(M;Y)$, mostre T admite uma única extensão contínua $\overline{T} : X \to Y$. Tal extensão é também linear e $\|\overline{T}\| = \|T\|$.
Sugestão: Para cada $x \in X$ tome uma sequência (x_n) em M convergindo para x. Defina $\overline{T}(x) = \lim T(x_n)$. Não se esqueça de mostrar que $\overline{T}$ está bem definido.

2. Mostre que o operador identidade em c_{00} não pode ser estendido a uma aplicação contínua de c_0 em c_{00}. Compare com o exercício anterior.

Teorema de Hahn-Banach

3. Seja M um subespaço de um espaço normado X. Mostre que
$$\overline{M} = \bigcap \left\{ \text{Ker } \varphi : \varphi|_M \equiv 0 \right\}.$$

4. Mostre que X^* separa pontos de X. Ou seja, mostre que dados $x, y \in X$ com $x \neq y$ existe $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

5. Um espaço de Banach Y é chamado de *isometricamente injetivo* se o teorema de Hahn-Banach continua válido com Y no lugar de $\mathbb{K}$. Mostre que ℓ_∞ é isometricamente injetivo.

6. Prove que todo espaço normado separável é (isométrico a) um subespaço de ℓ_∞.