MAT334 - Análise Funcional - 2013

3ª lista de exercícios

Quociente

1. Seja $M = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$. Mostre que M é um subespaço fechado de $\mathcal{C}[0,1]$. Dê uma expressão mais simples para a norma quociente de $\mathcal{C}[0,1]/M$. Este quociente é isométrico a qual espaço conhecido? Explicite a isometria.

2. (*Operadores de Posto Finito*) Um operador linear tem *posto finito* se sua imagem (que é sempre um subespaço vetorial) tem dimensão finita. Mostre que um operador linear de posto finito é contínuo se, e somente se, seu núcleo é fechado.
Sugestão: Um lado é direto. Para o outro, use o quociente do domínio do operador por seu núcleo.
Compare com o exercício 9 da lista 2. Observe que funcionais lineares têm posto finito.

3. Mostre que se X for separável, qualquer quociente de X também será.

4. Se K é um compacto Hausdorff e S é um subconjunto fechado de K, prove que $C(S)$ é (isomorfo a um) quociente de $C(K)$.
Sugestão: Teorema de extensão de Tietze.

Consequências do Teorema de Baire

5. (a) Mostre que todo subespaço próprio de um espaço normado X tem interior vazio.
(b) Use o teorema de Baire para mostrar que não existem espaços de Banach de dimensão infinita e enumerável.

6. Seja X um espaço de Banach de dimensão infinita e considere uma base algébrica $\mathcal{B} = \{x_i : i \in I\}$ de X. Então I é não enumerável pelo exercício anterior. Considere os funcionais coordenados x_i^*, $i \in I$. Mostre que apenas um número finito destes funcionais são contínuos.

7. Sejam $X = C^1[0,1]$ o espaço das funções com a primeira derivada contínua e $Y = C[0,1]$, ambos com a norma do supremo. Mostre que o operador derivação $D : X \to Y$ tem gráfico fechado, mas não é contínuo. Conclusão?

8. (*Aplicações Bilineares Contínuas*) Sejam X, Y e Z espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$ e $B : X \times Y \to X$ uma aplicação bilinear. Mostre que as seguintes condições são equivalentes:
   (a) B é contínua;
   (b) B é contínua na origem $(0,0) \in X \times Y$;
   (c) Existe $M > 0$ tal que $\|B(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ para quaisquer $x \in X,\ y \in Y$.

9. Mostre que toda bilinear separadamente contínua (ou seja, contínua na primeira variável e contínua na segunda separadamente) definida em espaços de Banach é contínua. *Sugestão: Use o Princípio da Limitação Uniforme.*

10. Mostre que uma aplicação bilinear definida em espaços de dimensão finita é sempre contínua.

11. Suponha que $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_0$ sejam duas normas definidas em um espaço vetorial X com as quais $(X, \|\cdot\|)$ e $(X, \|\cdot\|_0)$ sejam espaços de Banach. Mostre que se existe $M > 0$ tal que $\|x\|_0 \leq M\|x\|$, para todo $x \in X$, então as normas não equivalentes.

12. Prove o teorema do gráfico fechado usando o teorema da aplicação aberta.

13. Prove o teorema da aplicação aberta usando o teorema do gráfico fechado.
    Sugestão: Primeiro suponha T injetora. Para uma T qualquer use quociente.

    Devido aos dois exercícios anteriores, tais teoremas são ditos "equivalentes".