MAT334 - Análise Funcional - 2013

2ª lista de exercícios

Aplicações Lineares

1. Seja $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ dada por $T(f) = g$, onde $g(t) = \int_0^1 k(t,s)f(s)ds$ e k é uma função contínua em $[0,1] \times [0,1]$. Prove que T é um operador linear contínuo.

2. Sejam $T, S : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}[a,b]$ definidos por
$$T(f)(t) = t\int_a^b f(s)ds \quad \text{e} \quad S(f)(t) = tf(t).$$
Calcule $\|T\|$, $\|S\|$, $\|T \circ S\|$ e $\|S \circ T\|$.

3. Seja $y \in \ell_\infty$ fixado. Considere o operador $M_y : \ell_\infty \to \ell_\infty$ dado por $M_y(x) = (x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Mostre que M_y está bem definido, é contínuo e calcule sua norma. Faça o mesmo mas considerando $M_y : \ell_1 \to \ell_1$.

4. Sejam $p, q > 1$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Seja $(a_n)_n \in \ell_q$ fixado. Mostre que $\varphi((x_n)_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n a_n$ define um funcional linear contínuo em ℓ_p. Calcule a norma de φ.

5. Verifique que uma aplicação linear entre espaços normados é contínua se, e somente se, é limitada em alguma bola.

6. Mostre que se D é um subconjunto denso em B_X e $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, então $\|T\| = \sup\limits_{d\in D} \|T(d)\|$.

7. Mostre que se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, então $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup\limits_{\|x\|<1} \|T(x)\|$.

8. (a) Mostre que se X é um espaço normado de dimensão infinita e $Y \neq \{0\}$, então existe uma aplicação linear de X em Y descontínua. *Sugestão: Use uma base algébrica de X e construa uma aplicação linear não limitada*
(b) Conclua que se X é um espaço normado de dimensão infinita então $X^* \neq X^\#$.

9. Se $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, é imediato da continuidade de T que $\ker T = T^{-1}(\{0\})$ é fechado em X (por que?). Mostre que a recíproca é falsa exibindo uma aplicação linear

descontínua de núcleo fechado. *Sugestão: Pense em alguma aplicação injetora descontínua.*

10. Mostre que a imagem de um operador linear contínuo não precisa ser fechada.

11. Sejam X e Y espaços normados.
(a) Mostre se $T_n \to T$ em $\mathcal{L}(X,Y)$, então $T_n(x) \to T(x)$, $\forall x \in X$. *Ou seja, a convergência em $\mathcal{L}(X,Y)$ implica convergência pontual.*
(b) Mostre que a recíproca não é verdadeira. Para isso, considere a sequência $e_n : c_0 \to \mathbb{K}$ definida por $e_n^*\big((x_m)_m\big) = x_n$. Mostre que (e_n^*) converge pontualmente para o funcional nulo mas não em norma.

12. Mostre que se Y não for Banach, então $\mathcal{L}(X,Y)$ pode não ser completo. *Sugestão: Talvez seja fácil construir uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_\infty, c_{00})$ não convergente. Na verdade, sempre que Y não for completo $\mathcal{L}(X,Y)$ também não será. Veremos isso mais adiante.*

13. Sejam X, Y e Z espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Sejam $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.
(a) Prove que $S \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$ e que $\| S \circ T \| \leq \| S \| \| T \|$.
(b) Dê um exemplo para mostrar que a desigualdade pode ser estrita.

14. Mostre que ℓ_p pode ser isometricamente imerso em $L_p[0,1]$. *Ou seja, que ℓ_p é isométrico a um subespaço de $L_p[0,1]$.*

15. Mostre que $L_\infty[0,1]$ não é separável.

16. (Para quem fez topologia) Mostre que ℓ_∞ é isométrico a $\mathcal{C}(\beta\mathbb{N})$, onde $\beta\mathbb{N}$ é a compactificação de Stone-Čech dos Naturais. *A compactificação de Stone-Čech $\beta\mathbb{N}$ dos Naturais é o único espaço topológico compacto (a menos de homeomorfismo) que contém $\mathbb{N}$ densamente com a propriedade de que toda função limitada de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$ se estende continuamente a $\beta\mathbb{N}$.*