MAT334 - Análise Funcional - 2013

1ª lista de exercícios

Topologia dos espaços normados

1. Seja X um espaço normado.
(a) Mostre que toda sequência convergente em X é limitada, de Cauchy e possui um único limite.
(b) Mostre que se uma sequência $(x_n) \subset X$ é convergente, então qualquer subsequência de $(x_n) \subset X$ converge para o mesmo limite.
(c) Mostre que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então ela é convergente.

2. Seja X um espaço normado.
(a) Mostre que se $x_0 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ então são homeomorfismos as aplicaçôes $x \in X \mapsto x + x_0 \in X$ e $x \in X \mapsto \lambda x \in X$.
(b) Conclua que um subconjunto A de X é aberto se, e somente se, $x_0 + A \stackrel{\text{def}}{=} \{x_0 + a : a \in A\}$ é aberto. Mostre o resultado análogo para $\lambda A \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda a : a \in A\}$ com $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
(c) Mostre que se A é aberto e B é um conjunto qualquer, então $A + B \stackrel{\text{def}}{=} \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$ é aberto em X. *Sugestão: Escreva $A + B$ como união de conjuntos abertos.*
(d) Se F e G são fechados em X, $F + G$ é necessáriamente fechado? Prove ou dê um contra-exemplo. *Sugestão: Considere os conjuntos $F_1 = \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ e $F_2 = \{(x, -1/x) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$*
(e) Mostre que se F é fechado e K é compacto então $F + K$ é fechado. *Sugestão: Use a caracterização de compacidade por sequência, válida para espaços métricos.*
(f) Mostre que $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$. É válida a inclusão contrária? O item (d) pode ajudar.

3. (*Conjuntos convexos*) Um subconjunto C de um espaço vetorial é *convexo* se, para todo escalar $\lambda \in [0, 1]$ e $x, y \in C$ temos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.
(a) Mostre que as bolas de um espaço normado são convexas.
(b) Mostre que se C é um subconjunto convexo de um espaço normado, então seu fecho também é convexo.

4. (*Distâcia de ponto a conjunto*) Se A é um subconjunto de um espaço normado X, definimos a distância de $x \in X$ a A pondo $d(x,A) = \inf\{\|x-a\| : a \in A\}$. Prove que $x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x,A) = 0$.

Espaços de Banach

5. Mostre que c o espaço vetorial das sequências convergentes munido da norma do supremo é um espaço de Banach.

6. Mostre que ℓ_1 equipado com a norma do sup não é um espaço de Banach.

7. (*Soma direta externa*) Sejam $(X, \|\cdot\|)$ e $(Y, \|\cdot\|_0)$ espaços normados.
(a) Mostre que $|||\cdot||| : X \times Y \to \mathbb{R}_+$ dada por $|||(x,y)||| = \max\{\| x \|, \| y \|_0\}$ é uma norma em $X \times Y$. Mostre também que tal norma gera a topologia produto em $X \times Y$.
(b) Se X e Y são espaços de Banach, mostre que $\big(X \times Y, |||\cdot|||\big)$ é um espaço de Banach. $\big(X \times Y, |||\cdot|||\big)$ é chamado de soma direta externa de X e Y.

8. Considere a definição de ℓ_p estendida para $0 < p < 1$. Mostre que neste caso a "bola" unitária não é convexa. Conclua que ℓ_p não é um espaço normado se $0 < p < 1$.

9. (a) Mostre $\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ é uma norma em $\mathcal{C}[0,1]$ mas é apenas uma semi-norma no espaço vetorial das funções Riemann-integráveis.
(b) Verifique *se* $\big(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_1\big)$ é um espaço de Banach.
(c) Qual a relação (no sentido da inclusão) entre as topologias geradas por $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_\infty$?

10. Mostre que o conjunto das funções contínuas em $[a,b]$ tais que $f(a) = f(b)$ munido na norma do sup é um espaço de Banach.

11. Mostre que ℓ_p e $L_p[0,1]$ são separáveis se $1 \le p < \infty$. *Sugestão: Use o fato de que as funções contínuas são densas em* $L_p[0,1]$ *(com a norma p!) se* $1 \le p < \infty$.

12. Mostre que se X é separável, qualquer subconjunto de X é separável. Consequentemente, qualquer subespaço de X é separável.