MAT-144 - Cálculo Diferencial e Integral I para Oceanografia

Bacharelado em Oceanografia - 2013

2ª Lista de exercícios

1. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (c) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$

   (d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

   (g) $f(x) = (\ln x)^2 + 2^{x^3}$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

2. Encontre $c \in]a, b[$ como no TVM para:

   (a) $f(x) = x^3;\ a = -3;\ b = 0;$ (b) $f(x) = \ln x;\ a = 2;\ b = 10.$

   Resposta: (a) $c = -\sqrt{3}$; (b) $c = \frac{8}{\ln 5}$

3. Use o TVM para provar que $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

4. Prove as seguintes desigualdades:

   (a) $e^x > x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $\ln x < x$, para todo $x > 0$.

5. Estude o crescimento/decrescimento de $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$. Encontre os máximos/mínimos locais. Algum desses extremos locais é global (absoluto)?

   Resposta: Ponto de máximo local $x_0 = 0$. Pontos de mínimo local: $x_1 = -1$ e $x_2 = 2$. $x_2 = 2$ é ponto de mínimo absoluto. Não há ponto de máximo absoluto.

6. Encontre o máximo absoluto da função $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$. Quem é maior? e^π ou π^e?

   Resposta: Ponto de máximo absoluto de f é $x_0 = e$.

7. Esboce o gráfico das funções abaixo. Para tanto, estude o crescimento, concavidade e calcule os limites necessários. Destaque os pontos de inflexão e de máximo/mínimo locais e globais.

   (a) $f(x) = x^3 - x$ (b) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ (c) $f(x) = x^4 + 2x^3 + 1$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (e) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4}$ (f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

8. Calcule, caso exista

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1 - 2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^5 \ln x$ (h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right)$ (i) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]$

   Respostas: (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) 1, (e) 0, (f) 0, (g) 0 (h) 3, (i) $+\infty$.

9. (a) Esboce o gráfico de $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   (b) Determine, em função de k, o número de soluções reais da equação $ke^x = x^2$.

   Resposta: (b) Não há soluções se $k < 0$; tem 1 solução se $k = 0$ ou $k > \frac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k = \frac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0 < k < \frac{4}{e^2}$

10. Para que valores de k a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x = k$ tem três raízes reais distintas ?

    Resposta: $4 < k < 5$

11. Esboce o gráfico das funções abaixo.

    (a) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ (b) $f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ (c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

    (d) $f(x) = x^2 \ln x$ (e) $f(x) = x^x$ (f) $f(x) = (3 - \dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$

    (g) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$ (h) $f(x) = e^x - e^{3x}$ (i) $f(x) = \sqrt[2]{x^2 - 4}$

    (j) $f(x) = \ln(2x) - \ln(3x^2 + 3)$

12. Mostre que $x^5 + x + 1 = 0$ tem pelo menos uma solução no intervalo $[-1, 0]$.

13. Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ tem três raízes reais distintas.

14. Suponha que $f : [0,1] \to [0,1]$ seja contínua. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$. O c acima é chamado de ponto fixo de f.

    Sugestão: Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ fazemos $c = a$ ou $c = b$. Caso contrário, considere $g(x) = f(x) - x$

15. Seja $h(x) = 2x + \cos x$. Mostre que h tem uma (e apenas uma) raiz real.