MAT-144 - Cálculo Diferencial e Integral I para Oceanografia
Bacharelado em Oceanografia - 2013

1ª Lista de exercícios

I. Limite de funções

1. Calcule os seguintes limites, caso existam:

1) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^3+9x^2+12x+4}{-x^3-2x^2+4x+8}$	2) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{\sqrt{x^2+16}-5}{x^2+3x}$	3) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x-9}{x-3}$
4) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$	5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$	6) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$
7) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(20x)}{x}$	8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(20x)}{\operatorname{sen}(301x)}$	9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$
10) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{tg}(3x)\ \operatorname{cossec}(6x) \right)$	11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{x^2}$	12) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x \cos \dfrac{1}{x+x^2}$
13) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$	14) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2-5x+2)}{x^2+x-2}$	15) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3-x^2}$
16) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}^3(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$	17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+x^2}}{x}$	18) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$
19) $\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{\operatorname{sen}(x^3-1)\cos\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}}$	20) $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$	21) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$
22) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3-x^2+7x-3}{2-x+5x^2-4x^3}$	23) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$	24) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{9x+1}}$
25) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x}$	26) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^4+1}\right)$	27) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{7x^6+5x^4+7}}{x^4+2}$
28) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^5+2x-8}{\sqrt{x^6+x+1}}$	29) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[4]{7x^{12}+5x^4+7}}{2x^3+2}$	

Resp.: 1) $-3/4$; 2) $1/5$; 3) 3 ; 4) $1/4$; 5) 12 ; 6) 3 ; 7) 20 ; 8) $\frac{20}{301}$; 9) 1 ; 10) $1/2$; 11) $1/6$; 12) 0 ; 13) -1 ; 14) $1/3$; 15) $-\infty$; 16) 0 ; 17) $\nexists$; 18) $\nexists$; 19) 0 ; 20) $-\infty$; 21) $+\infty$; 22) $-1/2$; 23) 0 ; 24) $1/3$; 25) 1 ; 26) $-\infty$; 27) 0 ; 28) $-\infty$; 29) $-\sqrt[4]{7}/2$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $1+x^2+\dfrac{x^6}{3} \leq f(x)+1 \leq \sec x^2 + \dfrac{x^6}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cos\left(\dfrac{1}{x+x^2}\right)\right)$. Resp.: 0 ; 0.

3. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $|\operatorname{sen} x| \leq f(x) \leq 3|x|$ e $0 \leq g(x) \leq 1 + |\operatorname{sen} x|$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\,g(x)+\cos x)$ Resp.: 1.

4. Dê exemplos de funções f, g e h tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e tais que existam os limites $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ mas não exista o limite $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Compare com o teorema do confronto.

5. A resolução abaixo está incorreta. Assinale o erro e calcule (corretamente) o limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\underbrace{\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}-1\right)}_{\to 0}=\lim_{x\to+\infty}(x\cdot 0)=0.$$

6. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que f é limitada, f é positiva e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então tem-se que $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ f(x)g(x)\ ) = +\infty$. Resp.: Falsa.

   (b) Se f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções tais que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - g(x)\big) = +\infty$.
   Resp.: Falsa.

7. Dê exemplos de funções f e g tais que:

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 1$.

   (c) $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) = 0$ e $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$.

   (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \big(f(x) - g(x)\big) \neq 0$.

II. Funções Contínuas

1. Determine o conjunto dos pontos de seu domínio em que a função f é contínua. Justifique.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x^2-4)+5, & \text{se } x > 2 \\ \dfrac{x^2+x-6}{x-2}, & \text{se } x < 2 \\ 5, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{(x-1)^2} & \text{, se } x \neq 1 \\ 0 & \text{, se } x = 1 \end{cases}$

   Resp.: a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-1)^6}}{x-1} & \text{, se } x \neq 1 \\ 1 & \text{, se } x = 1 \end{cases}.$$

   Verifique que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. Pergunta-se: f é contínua no ponto $x = 1$? Por que? Resp. Não.

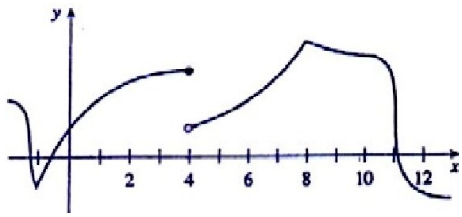
3. Decida se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.

   (a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é tal que $|f|$ é contínua em $x = 0$, então f é contínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

   (b) Se f e g são funções descontínuas em $x = 0$, então a função fg é descontínua em $x = 0$. Resp.: Falsa.

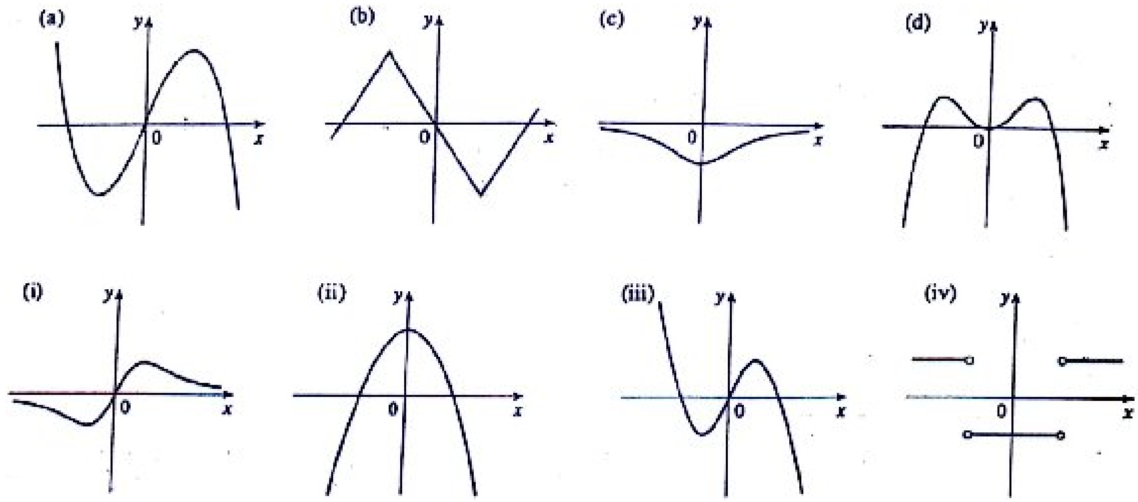
III. Derivadas

1. Considere o gráfico de f dado abaixo. Estabeleça, justificando, os pontos onde f não é derivável.



Resp.: -1 ; 4 ; 8 ; 11 .

2. Associe os gráficos de cada função de (a) a (d) com os gráficos de suas respectivas derivadas de (i) a (iv).



Resp.: (a) e (ii) ; (b) e (iv) ; (c) e (i) ; (d) e (iii) .

3. Verifique se f é contínua e derivável no ponto x_0, sendo:

(a) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)\cos\dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

(b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}} & \text{, se } x > 1 \\ 1 & \text{, se } x \leq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \operatorname{sen} x & \text{, se } x > 0 \\ x^5 + 4x^3 & \text{, se } x < 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

(d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{5}x^5, & \text{, se } x > 1 \\ x^4 & \text{, se } x \leq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

(e) $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

(g) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x^2 + x^4}} & \text{, se } x \neq 0 \\ 0 & \text{, se } x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

(h) $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $x_0 = 0$ i) $f(x) = |\operatorname{sen}(x^5)|$, $x_0 = 0$

Resp.: *são contínuas em x_0:* (a), (c), (e), (f), (g), (h), (i) ; *são deriváveis em x_0:* (f), (i).

4. Calcule $f'(x)$ para as funções f abaixo:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 2) $f(x) = \dfrac{(2x^3+1)^{32}}{x+2}$ 3) $f(x) = \dfrac{4x-x^4}{(x^3+2)^{100}}$

4) $f(x) = x \operatorname{sen}\left(x^5 - x^2\right)$ 5) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ 6) $f(x) = \sqrt[6]{x \operatorname{tg}^2 x}$

7) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \operatorname{cossec} x}{x^3 + 3x^2}$ 8) $f(x) = \sec\left(\sqrt{x^2+1}\,\right)$ 9) $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{tg}(x^3 - x^2)}{\sec x}$

10) $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$ 11) $f(x) = \dfrac{(x+\lambda)^4}{x^4 + \lambda^4}$ 12) $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(x - \operatorname{sen} x)}$

13) $f(x) = \dfrac{2x}{\left(x + \sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3}}}$ 14) $f(x) = \operatorname{cotg}(3x^2 + 5)$ 15) $f(x) = \dfrac{x^2}{\operatorname{sen}^{33} x \cos^{17} x}$

5. Analise as seguintes "soluções" para a questão abaixo.

Questão. Considere a função $f(x) = x|x|$. Decida se f é derivável em $x = 0$ e, em caso afirmativo, calcule $f'(0)$. Justifique suas afirmações.

"solução" 1. $f'(0) = 0$, pois $f(0) = 0$.

"solução" 2. Como a função $g(x) = |x|$ não é derivável em $x = 0$, não é possível usar a regra do produto para derivar f em $x = 0$. Logo f não é derivável em $x = 0$.

"solução" 3. Temos $f(x) = h(x)g(x)$, onde $h(x) = x$ e $g(x) = |x|$. Assim, $f'(0) = h'(0)g(0) + h(0)g'(0)$. Como $g(0) = 0$ e $h(0) = 0$, temos que $f'(0) = 0$.

"solução" 4. Temos $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{, se } x < 0 \\ x^2 & \text{, se } x \geq 0 \end{cases}$. Logo $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} -x = 0$. Portanto $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$, ou seja $f'(0) = 0$.

Resp.: somente a solução 4 está correta.

6. Encontre os pontos da curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 11$ cuja reta tangente é horizontal.

Resp: $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

7. Mostrar que a reta $y = -x$ é tangente à curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Encontre o ponto de tangência.

Resp: $(3, -3)$.

8. Determine todos os pontos (x_0, y_0) sobre a curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tais que a tangente à curva em (x_0, y_0) seja paralela à reta $16x - y + 5 = 0$.

Resp: $(-1, -13)$, $y = 16x + 3$; $(0, 7)$, $y = 16x + 7$; $(1, 19)$, $y = 16x + 3$.

9. Seja $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$. Determine todas as retas tangentes ao gráfico de f que passam pelo ponto $(0, 0)$.

Resp.: $y = -9x$; $y = -x$

10. Calcule as derivadas indicadas:

a) y'' sendo $y = \dfrac{1}{x} + \cos x^2$; b) $\dfrac{d^2}{dx^2}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$; c) $\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\operatorname{sen}(-x)\right)$;

d) $\dfrac{d^9}{dx^9}\left(x^9\right)$; e) $\dfrac{d^{1001}}{dx^{1001}}\left(x^{1000} + x^{100}\right)$.