MAT-111 - Cálculo Diferencial e Integral I
Bacharelado em Matemática - 2010

3ª Lista de exercícios

Problemas de máximos e mínimos

1. Mostre que dentre todos retângulos de certo perímetro P o quadrado de lado $\frac{P}{4}$ é que que tem maior área. Mostre que dentre todos os retângulos de mesma área o quadrado é o que tem menor perímetro.

2. Para que pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 25$ a soma das distâncias a (2,0) e (-2,0) é mínima?

   Resposta: $(5, 0)$ e $(-5, 0)$.

3. Achar os pontos da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$ mais próximos de (0,1). Resposta: $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

4. Um cilindro é obtido girando-se um retângulo ao redor do eixo x, onde a base do retângulo está apoiada. Seus vértices superiores estão sobre a curva $y = \frac{x}{x^2+1}$. Qual é o maior volume que tal cilindro pode ter? Resposta: $\frac{\pi}{4}$.

5. Um arame de comprimento L deve ser cortado em 2 pedaços, um para formar um quadrado e outro um triângulo equilátero. Como se deve cortar o arame para que a soma das áreas cercadas pelos 2 pedaços seja (a) máxima? (b) mínima? Mostre que no caso (b) o lado do quadrado é $2/3$ da altura do triângulo. Resposta: (a) Deve-se formar apenas um quadrado; (b) o lado do quadrado é $\frac{\sqrt{3}L}{9+4\sqrt{3}}$.

6. (a) Latas cilíndricas fechadas devem ser feitas com um volume V especificado. Qual é a razão entre a altura e o diâmetro da base que minimiza a quantidade de metal gasto para fazer a lata?

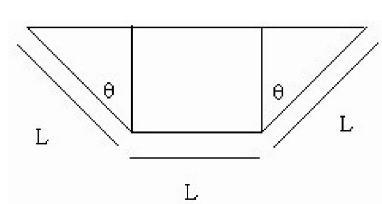
   (b) Por que as latas encontradas no mercado não são em geral como em (a)? Em geral o metal vem em uma chapa retangular. Não há desperdício envolvido em cortar a chapa que formará a superfície lateral, mas as tampas devem ser cortadas de uma peça quadrada, e as sobras, são desprezadas (ou então recicladas). Ache a razão entre a altura e o diâmetro de uma lata de volume V que minimiza o custo do material utilizado. Resposta: (a) 1; (b) $4/\pi$.

7. Um canhão situado no solo é posto sob um ângulo de inclinação θ. Seja r o alcance do canhão, isto é, a distância entre o canhão e o ponto de impacto da bala. Então r é dado por $r = \frac{2v^2}{g}\operatorname{sen}\theta\cos\theta$, onde v e g são constantes. Para que ângulo o alcance é máximo? Resposta: $\theta = \frac{\pi}{4}$.

8. Determine o cone circular reto de maior volume que pode ser inscrito numa esfera de raio 3.

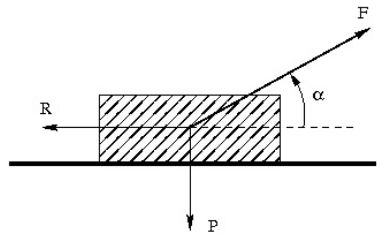
   Resposta: altura: 4; raio: $2\sqrt{2}$.

9. Um reservatório tem fundo horizontal e seção transversal como se mostra na figura. Achar a inclinação dos lados com a vertical de modo a obter a máxima capacidade. Resposta: $\theta = \frac{\pi}{6}$.



10. Um muro de 2 metros de altura está a 1 metro de distância da parede lateral de um prédio. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apóiam uma na parede, e outra no chão do lado de fora do muro? Resposta: $\left(1 + \sqrt[3]{4}\right)^{3/2}$.

11. Um corpo de peso P apoiado sobre um plano horizontal deve ser deslocado horizontalmente pela aplicação de uma força de intensidade F. Qual o ângulo α com a horizontal deve formar a força para que a intensidade da mesma necessária para mover o corpo seja mínima, admitindo coeficiente de atrito $\mu > 0$? Resposta: $\operatorname{arctg} \mu$.



12. Um corredor de largura a forma um ângulo reto com um segundo corredor de largura b. Uma barra longa, fina e pesada deve ser empurrada do piso do primeiro corredor para o segundo. Qual o comprimento da maior barra que pode passar a esquina? Resposta: $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$.

Problemas de taxa de variação

1. Num certo instante t_0, a altura de um triângulo cresce à razão de 1 cm/min e sua área aumenta à razão de 2 cm^2/min. No instante t_0, sabendo que sua altura é 10 cm e sua área é 100 cm^2, qual a taxa de variação da base do triângulo? Resp.: $-1,6$ cm/min.

2. Despeja-se areia sobre o chão fazendo um monte que tem, a cada instante, a forma de um cone com diâmetro da base igual a três vezes a altura. Quando a altura do monte é de $1,2$ m, a taxa de variação com que a areia é despejada é de $0,081\text{m}^3/\text{min}$. Qual a taxa de variação da altura do monte neste instante? Resp.: $\dfrac{1}{40\pi}$ m/min.

3. A aresta de um cubo cresce ao longo do tempo. Num certo instante t_0, o seu volume cresce a uma taxa de $10\text{cm}^3/\text{min}$. Sabendo que, neste instante, a aresta do cubo mede 30cm, qual é a taxa de variação da área da superfície do cubo? Resp.: $\dfrac{4}{3}$ cm^2/min.

4. Uma lâmpada está no solo a 15m de um edifício. Um homem de $1,8$m de altura anda a partir da luz em direção ao edifício a $1,2$m/s. Determine a velocidade com que o comprimento de sua sombra sobre o edifício diminui quando ele está a 12m do edifício e quando ele está a 9m do edifício.
Resp.: $3,6$m/s; $0,9$m/s.

5. Uma tina de água tem 10 m de comprimento e uma seção transversal com a forma de um trapézio isósceles com 30 cm de comprimento na base, 80 cm de extensão no topo e 50 cm de altura. Se a tina for preenchida com água a uma taxa de $0,2$ m^3/min, quão rápido estará subindo o nível da água quando ela estiver a 30 cm de profundidade? Resp.: $\frac{10}{3}$ cm/min.

6. Uma escada de 25 pés está encostada na parede de uma casa e sua base está sendo empurrada no sentido contrário ao da parede. Num certo instante, a base da escada se encontra a 7 pés da parede e está sendo empurrada a uma taxa de 2 pés por segundo (em sentido contrário ao da parede!).

   (a) Qual a velocidade com a qual o topo da escada se move para baixo nesse instante?

   (b) Considere o triângulo formado pela parede da casa, a escada e o chão. Calcule a taxa de variação da área deste triângulo no instante em que a base da escada se encontra a 7 pés da parede.

   (c) Calcule a taxa de variação do ângulo formado pela parede da casa e a escada, quando a base da escada estiver a 7 pés da parede.

   Resp.: (a) $\frac{7}{12}$pes/s; (b) $\frac{527}{24}$pes^2/s; (c) $\frac{1}{12}$rad/s.