# MAT-111 - Cálculo Diferencial e Integral I
**Bacharelado em Matemática - 2010**

## 2ª Lista de exercícios

1. (a) Mostre que toda função estritamente crescente [1] (ou estritamente decrescente) é injetora.
(b) Suponha que $f$ seja estritamente crescente. O que se pode afirmar sobre sua inversa $f^{-1}$ quanto ao crescimento?

2. Sejam $f(x) = x^3 + 5x - 6$ e $g$ a função inversa de $f$. Calcule $g'(x)$, $g''(x)$ em termos de $g(x)$. Calcule $g''(0)$.

Resposta: $g''(0) = -\dfrac{3}{256}$

3. Sejam $y = f(x)$ dada por $f(x) = x^3 + \ln x$, $x > 0$ e $x = g(y)$ sua função inversa. Calcule $g'(y)$ em termos de $g(y)$. Calcule $g'(1)$.

Resposta: $g'(1) = \dfrac{1}{4}$

4. Seja $h(x) = 2x + \cos x$.
   (a) Mostre que $h$ é bijetora.
   (b) Calcule $h^{-1}(1)$.
   (c) Admitindo $h^{-1}$ derivável, determine $(h^{-1})'(1)$.

Resposta: (b) 0; (c) $\dfrac{1}{2}$

5. Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo:

(a) $\cosh(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ (b) $\operatorname{senh}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ (c) $f(x) = e^{e^x}$

(d) $f(x) = x^e + e^x$ (e) $f(x) = e^{1/x^2} + \dfrac{1}{e^{x^2}}$ (f) $f(x) = \ln(e^x + 1)$

(g) $f(x) = (\ln x)^2 + (1 + 2^{x^3})^x$ (h) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ (i) $f(x) = x^\pi + \pi^x$

(j) $f(x) = 2^{x^2} + 3^{2x}$ (k) $f(x) = \ln(\operatorname{arctg} x)$ (l) $f(x) = \left(1 + \cos^2 x\right)^{\operatorname{sen} x}$

(m) $f(x) = (e^x + 3x)^{\operatorname{arcsen}(x^2)}$ (n) $f(x) = (3 + \cos x)^{\operatorname{tg}(x^2)}$ (o) $f(x) = \dfrac{\ln(x^3 + 2^{x^3})}{x^2 + e^{\cos x}}$

(p) $f(x) = (x^2+1)^{\operatorname{sen}(x^5)}$ (q) $f(x) = (1 + \operatorname{arctg} x^2)^{1/x^4}$ (r) $f(x) = x^2 e^{\operatorname{arctg} x}$

(s) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg}(3x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$ (t) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

6. Encontre $c \in ]a, b[$ como no TVM para:
   (a) $f(x) = x^3$; $a = -3$; $b = 0$; (b) $f(x) = \ln x$; $a = 2$; $b = 10$.

Resposta: (a) $c = -\sqrt{3}$; (b) $c = \frac{8}{\ln 5}$

7. Use o TVM para provar as seguintes desigualdades:
   (a) $|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.
   (b) $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \frac{1}{2}|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

[1] $f : D \to \mathbb{R}$ é estritamente crescente se, para cada $x_1, x_2 \in D$ com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$. Defina você o que seria $f$ estritamente decrescente.

(c) $\left|\ln \frac{a}{b}\right| \leq |a-b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \geq 1$ e $b \geq 1$.

(d) $e^x - e^y \geq x - y$, para todos $x, y$ com $x \geq y \geq 0$.

8. Seja $f(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$ e seja $g$ a sua inversa. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que

$$g(b) - g(a) \leq \frac{1}{2}(b-a).$$

9. Seja $f$ uma função derivável no intervalo $]-1, +\infty[$. Mostre que se $f(0) = 0$ e $0 < f'(x) \leq 1$, para todo $x > 0$, então $0 < f(x) \leq x$, para todos $x > 0$. *Sugestão: Considere* $g(x) = f(x) - x$

10. Encontre o máximo absoluto da função $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$. Quem é maior? $e^{\pi}$ ou $\pi^e$?

11. Prove as seguintes desigualdades:

(a) $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, para todo $x > 1$

(b) $2x \operatorname{arctg} x > \ln(1 + x^2)$, para $x > 0$

(c) $\dfrac{\operatorname{tg}\ b}{\operatorname{tg}\ a} > \dfrac{b}{a}$ para $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(d) $x - \dfrac{x^3}{3!} < \operatorname{sen} x < x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$, para $x > 0$

(e) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{1}{2}x$, para $x > 0$

*Sugestão: Em (c) considere* $g(x) = \frac{tgx}{x}$

12. Determine a constante $a$ para que $f(x) = x^2 + \dfrac{a}{x}$ tenha:

(a) um mínimo local em $x = 2$.

(b) um mínimo local em $x = -3$.

(c) Mostre que $f$ não terá máximo local para nenhum valor de $a$.

Resposta: (a) $a = 16$; (b) $a = -54$

13. Calcule, caso exista

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\operatorname{tg}(\pi x)}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x^{100}}{\sqrt[5]{x}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} (\ln x)^{(x-1)}$

(e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{e^{2x}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{e^{x^2}}$

(g) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^p \ln x$, $p > 0$

(h) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{p}{x}\right)$

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{2}{x^2}\right)$

(j) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{e^x - 1}\right]$

(k) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (x \operatorname{sen} x)^{\operatorname{tg} x}$

(l) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (e^x + 3x)^{1/x}$

(m) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} x^{\operatorname{tg}(x^2)}$

(n) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left[\frac{1}{x} + \ln x\right]$

(o) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(2x^2)}{\ln(1+3x^2)}$

(p) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \operatorname{arctg} x}$

(q) $\displaystyle\lim_{x \to 0} (1 + \operatorname{sen} 2x)^{1/\operatorname{sen} x}$

(r) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x \operatorname{sen}\ x + 2x^2}{e^x + e^{-x} - 2}$

(s) $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} (\operatorname{tg} x \sec x - \sec^2 x)$

(t) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^{\ln 2/(1+\ln x)}$

(u) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (1+3x)^{1/\ln x}$

(v) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{1/\ln x}$

(w) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left[\ln(x+3)^{x+4} - \ln(x+2)^{x+4}\right]$

Respostas: (a) 0, (b) 0, (c) 0, (d) 1, (e) 0, (f) 0, (g) 0 (h) $p$, (i) $\frac{1}{6}$, (j) 1, (k) 1, (l) $e^4$, (m) 1 (n) $+\infty$, (o) $\dfrac{2}{3}$, (p) 1, (q) $e^2$, (r) 3, (s) $-\dfrac{1}{2}$, (t) 2, (u) $e$, (v) $e$, (w) 1.

14. Determine $c$ para que a função $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + c$ tenha uma única raiz real.

Resposta: $c < -27$ ou $c > 5$

15. Mostre que a equação $3x-2+\cos(\frac{\pi x}{2})=0$ tem exatamente uma raiz real.

16. (a) Esboce o gráfico de $f(x)=x^2e^{-x}$.

(b) Determine, em função de $k$, o número de soluções reais da equação $ke^x=x^2$.

Resposta: (b) Não há soluções se $k<0$; tem 1 solução se $k=0$ ou $k>\dfrac{4}{e^2}$; tem 2 soluções se $k=\dfrac{4}{e^2}$; tem 3 soluções se $0<k<\dfrac{4}{e^2}$

17. (a) Ache o ponto de mínimo de $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ no intervalo $]0,+\infty[$.

(b) Prove que $\dfrac{e^{a+b}}{ab}\geq e^2$, para todos $a>0$ e $b>0$.

Resposta: (a) $x_0=1$

18. Seja $f$ uma função. Se existir uma reta $y=mx+n$ tal que $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(mx+n)]=0$, dizemos que $y=mx+n$ é uma **assíntota** para $f$. Prove que a reta $y=mx+n$ é uma assíntota para $f$ se, e somente se, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=n$. (Tudo o que dissemos para $x\to+\infty$ vale também para $x\to-\infty$.)

19. Esboce o gráfico das funções abaixo.

(a) $f(x)=x^4+2x^3+1$ (b) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (c) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$ (e) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ (f) $f(x)=(3-\dfrac{6}{x})e^{\frac{2}{x}}$

(g) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x^2}$ (h) $f(x)=e^x-e^{3x}$ (i) $f(x)=x-3\ln x-\dfrac{2}{x}$

(j) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ (k) $f(x)=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$ (l) $f(x)=x^x$

(m) $f(x)=\ln(2x)-\ln(3x^2+3)$ (n) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ (o) $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{x^2}$

(p) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x+2}$ (q) $f(x)=\operatorname{arctg}(\ln x)$ (r) $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{x^2}$

(s) $f(x)=x^2\ln x$ (t) $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ (u) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$

20. Achar os valores máximo e mínimo de:

(a) $f(x)=\operatorname{sen}x-\cos x,\ x\in[0,\pi]$; (b) $x^4-4x^4+4x^2+2,\ x\in[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$;

(c) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x,\ \frac{1}{2}\leq x\leq 4$; (c) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-2x^2},\ -1\leq x\leq 2$;

(d) $f(x)=|x^4-2x^3|,\ 0\leq x\leq 3$.

Respostas: (a) $-1$; $\sqrt{2}$ (b) (c) 1; $\frac{1}{4}+\ln 4$ (d) $\sqrt[3]{-3}$; 0 (e) 0; 27

21. Para que números positivos $a$ a curva $y=a^x$ corta a reta $y=x$?

Resposta: $a\leq e^{\frac{1}{e}}$

22. Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivável e $a,b\in\mathbb{R}$ tais que $f(a)=f(b)=0$. Mostre que se $f'(a)f'(b)>0$, então existe $c$ entre $a$ e $b$ tal que $f(c)=0$.

23. Para que valores de $k$ a equação $2x^3-9x^2+12x=k$ tem três raízes reais distintas ?

24. Seja $f(x)=x^7+8x^3-x^5-8x$. Prove que $f'(x)$ tem duas raízes distintas no intervalo $]-1,1[$.

25. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável e seja $a \in \mathbb{R}$ fixado. Verifique se as afirmações são **verdadeiras** ou **falsas**. Justifique.

   (a) Se $f'(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (b) Se $f$ é derivável até segunda ordem com $f'(x) > 0$ e $f''(x) > 0$, para todo $x > a$, então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (c) Se $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ então $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$.

   (d) Se existe uma assíntota para $f$ (quando $x \to +\infty$) com coeficiente angular $m$ e se existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = L$, então $L = m$.

Resposta: As afirmações (b) e (d) são **verdadeiras** e (a) e (c) são **falsas**

26. Suponha que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ seja contínua, $f(0) = 1$ e que $f(x)$ é um número racional para todo $x \in [0,1]$. Prove que $f(x) = 1, \forall x \in [0,1]$. *Sugestão: Faça por absurdo e use o TVI*

27. Suponha que $f : [0,1] \to [0,1]$ seja contínua. Prove que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = c$.
*Sugestão: Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ fazemos $c = a$ ou $c = b$. Caso contrário, considere $g(x) = f(x) - x$*

28. (a) Prove que se $p$ é um polinômio de grau 1, então a equação $e^x - p(x) = 0$ tem no máximo uma solução real;

   (b) Prove que se $p$ é um polinômio de grau 2, então a equação $e^x - p(x) = 0$ tem no máximo 2 soluções reais;

   (c) Prove que se $p$ é um polinômio, então a equação $e^x - p(x) = 0$ não pode ter infinitas soluções reais.