

**MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II**  
**Bacharelado em Matemática - 2011**  
**Prova Substitutiva - Tipo B**

Nome:

**Todas as respostas devem ser (legíveis e) justificadas!**

1. **(1,5)** Encontre uma curva parametrizada *diferenciável* definida em um *intervalo*  $I$  e cuja imagem coincida com a curva de nível  $c = 0$  da função  $f(x, y) = -y + \sqrt{1 - 3(x - 1)^2}$
2. **(2,5)** Seja  $f$  uma função diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ . Suponha que
  - (I) A imagem da curva  $\gamma(t) = (t, t^2, t^2/2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  esteja contida no gráfico de  $f$ ;
  - (II)  $\sigma(u) = (2u - 1, u^2 + u + 1)$ ,  $u \in \mathbb{R}$  possua imagem contida em uma curva de nível de  $f$ .
  - (a) Calcule  $f(-1, 1)$ ;
  - (b) Encontre uma equação para o plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $(-1, 1, f(-1, 1))$ .
3. **(3,0)** Seja  $f(x, y) = (x^3 - y^3)^{\frac{1}{3}}$ .
  - (a) Calcule  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  quando  $x \neq y$ ;
  - (b) Calcule, caso existam,  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , quando  $a = b$ ; *Atenção, aqui talvez você precise separar em 2 casos*
  - (c) Em que pontos  $f$  é diferenciável? JUSTIFIQUE!
4. **(3,0)** Considere a função *não diferenciável*  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 
  - (a) Em quais pontos  $f$  é contínua?
  - (b) Calcule, caso exista,  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$ , sendo  $u = (a, b)$  um vetor unitário qualquer ( $a^2 + b^2 = 1$ ).
  - (c) Para qual(is) vetor(es) unitário(s)  $u = (a, b)$  a derivada direcional  $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$  é máxima?