MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Bacharelado em Matemática - 2011

7ª lista de exercícios

I. Classificação dos pontos críticos

1. Determine os pontos críticos das funções abaixo e classifique-os:

   a) $z = 2x^2 + xy + 3y^2 + 10x - 9y + 11$
   b) $z = 3xy^2 + y^2 - 3x - 6y + 7$
   c) $z = x^2y^2$
   d) $z = x^3y^3$
   e) $z = (x-1)^3 + (y-2)^3 - 3x - 3y$
   f) $z = y\cos x$
   g) $z = (2x - x^2)(2y - y^2)$
   h) $z = y^4 + 4x^2y - 4x^2 - 8y^2$
   i) $z = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
   j) $z = \ln(3x^2 + 4y^2 - 2x + 7)$

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + l$, onde a, b, c, d, e, l são constantes. Prove que se (x_0, y_0) for um extremante local de f, então será um extremante global de f. *Dica: dados $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, observe que o gráfico da função real $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$ é uma parábola.*

   Use o exercício anterior para justificar que os problemas 3 e 4 a seguir têm solução e encontre tal solução. Justifique cuidadosamente sua resposta.

3. Qual o ponto do plano $x + 2y - z + 4 = 0$ que está mais próximo do ponto $(1, 1, 1)$?

4. Considere as retas reversas

   $$r: \ X = (-2, 3, -1) + \alpha(4, 1, 5), \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad s: \ X = (-1, 0, 3) + \mu(-2, 3, 1), \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

   Encontre $P \in r$ e $Q \in s$ de modo que a distância entre P e Q seja mínima.

5. É impossível para uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ter 2 máximos locais e nenhum mínimo local. O mesmo não ocorre com uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Verifique que $f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2$ tem exatamente dois pontos críticos, ambos máximos locais. Faça um esboço de uma superfície com tais características e tente compreender como isso ocorre.

6. Seja $f(x, y) = k(x^2 + y^2) - 2xy$, onde k é uma constante.

   (a) Verifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, o par $(0, 0)$ é um ponto crítico de f.

   (b) Para cada valor de k, classifique o ponto crítico $(0, 0)$ com relação a máximos e mínimos locais e sela. Existem valores de k para os quais podemos afirmar que $(0, 0)$ é extremo global (absoluto) de f?

7. Determine os valores de a para os quais a função $f(x, y) = 2ax^4 + y^2 - ax^2 - 2y$

   (a) tem exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local;

   (b) tem exatamente dois pontos de sela e um mínimo local.

   Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?

   Existe $a \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

II. Fórmula de Taylor

1. Determine o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de (x_0, y_0), sendo:

   (a) $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

   (b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 + 4y$ e $(x_0, y_0) = (1, 1)$;

   (c) $f(x, y) = \operatorname{sen}(3x + 4y)$ e $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

2. Sejam $f(x, y) = e^{x+5y}$ e $P_1(x, y)$ o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em torno de $(0, 0)$.

   (a) Mostre que $|e^{x+5y} - P_1(x, y)| < \frac{3}{2}(x + 5y)^2$ para todo (x, y), com $x + 5y < 1$.

   (b) Avalie o erro que se comete na aproximação $e^{x+5y} \cong P_1(x, y)$ para $x = 0,01$ e $y = 0,01$.

3. Seja $f(x, y) = x \operatorname{sen} y$.

   (a) Determine o polinômio de Taylor de ordem 2 de f em torno de $(0, 0)$;

   (b) Seja $P_2(x, y)$ tal polinômio. Mostre que $|f(x, y) - P_2(x, y)| < \dfrac{|y|^2}{2}\left(|x| + \dfrac{1}{3}|y|\right)$, para todo (x, y) tal que $|x| < 1$.

4. Seja f de classe C^3 no aberto A e (x_0, y_0) um ponto de A. Prove que existe uma bola aberta B centrada em (x_0, y_0) e contida em A e um número $M > 0$ tal que para todo $(x, y) \in B$,

   $$|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq M\|(x - x_0, x - y_0)\|^3,$$

   sendo P_2 o polinômio de Taylor de ondem 2 de f em torno de (x_0, y_0). Conclua que

   $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E_2(x, y)}{\|(x - x_0, x - y_0)\|^2} = 0.$$

Algumas respostas

I. 1. a) $(-3, 2)$ mínimo; b) $(2/3, 1)$, $(-4/3, -1)$ selas; c) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ mínimos; d) $(0, \lambda)$ e $(\lambda, 0)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$ selas; e) $(2, 1)$ e $(0, 3)$ sela; $(2, 3)$ mínimo e $(0, 1)$ máximo. f) $(\pi/2 + k\pi, 0)$ com $k \in \mathbb{Z}$ selas; g) $(1, 1)$ máximo, $(0, 0), (2, 0), (0, 2), (2, 2)$ selas; h) $(0, 0)$ máximo, $(0, 2)$ mínimo, $(0, -2), (\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, 1)$ selas; i) $(0, 0)$ sela, $\pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ máximos, $\pm(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ mínimos; j) $(1/3, 0)$ mínimo; **3.** $(0, -1, 2)$. **4.** $\sqrt{12}$. **6.** b) $k > 1$: mínimo local; $-1 < k < 1$: sela; $k < -1$: máximo local; $k \geq 1$: $(0, 0)$ é ponto de mínimo global; $k \leq -1$: $(0, 0)$ é ponto de máximo global. **7.** a) $a > 0$ b) $a < 0$ c) não d) $a = 0$.

II. 1. a) $1 + x + 5y$ b) $5 + (x - 1) + 7(y - 1)$ c) $3x + 4y$ **2.** b) Inferior a 0,01 **3.** a) xy.