MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Bacharelado em Matemática - 2011

6ª lista de exercícios

I. Derivada direcional

1. Ache a derivada direcional máxima de f no ponto dado e dê a direção em que ela ocorre.

   (a) $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-y} + 3y$, $(1,0)$; (b) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, $(1,2)$;

   (c) $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^{z} + \mathrm{sen}(y)$, $(2,0,0)$; (d) $f(x,y,z) = -\dfrac{4}{y} + z\ln(x)$, $(1,2,-1)$.

2. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e considere os pontos $A(1,3)$, $B(3,4)$, $C(2,4)$ e $D(6,15)$. Sabe-se que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AB}/||\overrightarrow{AB}||$ é $3\sqrt{5}$ e que a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\overrightarrow{AC}/||\overrightarrow{AC}||$ é $\sqrt{8}$. Encontre o vetor gradiente $\nabla f(1,3)$ e a derivada direcional de f em A na direção e sentido do versor $\vec{u} = \overrightarrow{AD}/||\overrightarrow{AD}||$.

3. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ é uma curva de nível de f. Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1,-4)$ e na direção e sentido do versor de $\vec{v} = (3,4)$.

4. Sejam $f(x,y) = 3x^2y - 2xy^2$ e $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

   (I) $\nabla f(x_0,y_0)$ é tangente à curva $xy^3 - x^3y - 2xy - y^3 + 6 = 0$ no ponto $(1,2)$;

   (II) a derivada direcional de f no ponto (x_0,y_0) na direção do vetor $\vec{w} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ é igual a $9/\sqrt{2}$.

   Determine <u>todos</u> os pontos (x_0,y_0) para os quais se tem <u>simultaneaneamente</u> as condições (I) e (II) acima satisfeitas.

5. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

   (b) Seja $\vec{u} = (m,n)$ um vetor unitário (isto é, $m^2+n^2=1$). Use a definição de derivada direcional para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0)$.

   (c) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

6. Sabe-se que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que o gráfico de f contém as imagens de ambas curvas

   $$\gamma(t) = (-t/2, t/2, t/2)\,,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \sigma(u) = \left(u+1, u, u+2+u^{-1}\right),\ u \in \mathbb{R}^*.$$

   Determine $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$, onde $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. A imagem da curva $\gamma(t) = \big(t, -t, -2t^3 - 2t^2\big)$, $t \in \mathbb{R}$ está contida no gráfico da função deferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sabe-se ainda que a reta tangente, no ponto $(1, -1)$, à curva de nível de f que contém este ponto tem equação $2x - 3y - 5 = 0$. Determine o gradiente de f em $(1, -1)$ e determine o menor valor que uma derivada direcional pode assumir neste ponto.

8. Suponha que sobre uma certa região do espaço o potencial elétrico V é dado por $V(x, y, z) = 5x^2 - 3xy + xyz$.

   (a) Ache a taxa de variação do potencial em $P(3, 4, 5)$ na direção do vetor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

   (b) Em que direção V muda mais rapidamente em P?

   (c) Qual é a maior taxa de variação em P?

II. Máximos e mínimos

9. Encontre uma parametrização para C e use esta parametrização para encontrar, caso existam, os valores máximo e mínimo de f em C, bem como os pontos onde estes valores são assumidos:

   (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 = 1\}$ e $f(x, y) = x^3 y$.

   (b) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \text{ e } z = 2y\}$ e $f(x, y, z) = x - z$.

   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1 \text{ e } x - y + 3z = 3\}$ e $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

10. Ache o máximo e o mínimo absolutos da função na região D indicada. (Esboce D.)

    (a) $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$; D é o triângulo (interior e bordas) de vértices $(0, 0)$, $(4, 0)$ e $(4, 5)$

    (b) $f(x, y) = xy\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2,\ x \le 0,\ \ y \ge 0\}$

    (c) $f(x, y) = 2x^3 + y^4$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

    (d) $f(x, y) = (4x - x^2)\cos y$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3,\ \ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}\}$

Algumas respostas:

I. **2.** $\nabla f(1, 3) = (11, -7)$ e $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}} - 29/13$. **3.** $4/5$ **4.** $\pm(\sqrt{6}, 3\sqrt{6}/2)$ **5.** Não é diferenciável

6. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **7.** $\nabla f(1, -1) = (-4, 6)$ e $-\sqrt{52}$ é o valor mínimo entre as derivadas direcionais.

II. 9. (a) pontos de máximo: $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$; pontos de mínimo: $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$ e $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$.

(b) ponto de máximo: $(\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 - \frac{4}{\sqrt{5}})$; ponto de mínimo: $(-\frac{1}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 2 + \frac{4}{\sqrt{5}})$.

(c) ponto de mínimo: $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{5}{6})$; não tem ponto de máximo.

10. (a) máximo: $f(4, 5) = 13$, mínimo: $f(4, 0) = -7$;

(b) máximo: $f(0, 0) = 0$, mínimo: $f(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = -\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$;

(c) máximo: $f(1, 0) = 2$, mínimo: $f(-1, 0) = -2$;

(d) máximo: $f(2, 0) = 4$, mínimo: $f(3, -\frac{\pi}{4}) = f(3, \frac{\pi}{4}) = f(1, \frac{-\pi}{4}) = f(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.