MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Bacharelado em Matemática - 2011

5ª lista de exercícios

I. Mais vetor gradiente

1. Se $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, ache o vetor gradiente $\nabla f(2,1)$ e use-o para achar a reta tangente à curva de nível 8 de f no ponto $(2,1)$. Esboce a curva de nível, a reta tangente e o vetor gradiente.

2. Seja r a reta tangente à curva $x^3 + 3xy + y^3 + 3x = 18$ no ponto $(1,2)$. Determine as retas que são tangentes à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralelas à reta r.

3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Fixado um certo $P = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0,\ f(x_0, y_0)\big)$ tem equação $-2x+2y-z+3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que **não pode** ser a curva de nível de f que contém o ponto P:

   (a) $\gamma(t) = \left(-\dfrac{1}{t}, t\right)$; (b) $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^5}{5}, -\dfrac{2t^3}{3} + 3t\right)$; (c) $\gamma(t) = (t^2, t^3 + t)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas $\gamma(t) = (2, t, 2t^2)$ e $\mu(t) = (2t^2, t, 2t^4)$ estejam contidas no gráfico de f. Determine o gradiente de f no ponto $(2,1)$.

5. O gradiente de $f(x,y) = x^2 + y^4$ é tangente à imagem da curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t > 0$ em um ponto P. Encontre a equação da reta tangente à curva de nível de f que contém P, no ponto P.

6. Sabe-se que a curva $\gamma(t) = (t^2 + 1, t^3 + t^2 + t)$ é uma curva de nível da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f(\gamma(t)) = 2$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Admita que existem 2 pontos $(x_0, y_0) \in \mathrm{Im}\gamma$ com a propriedade de que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, 2)$ é paralelo ao plano $x+y-z = 0$. Encontre esses 2 pontos.

II. Função de 3 variáveis

7. Esboce a superfície de nível c de f, sendo

   (a) $f(x,y,z) = x$ e $c = 1$; (b) $f(x,y,z) = x^2 + z^2$ e $c = 1$;

   (c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, $c = 1$ e $c = -1$.

8. Ache os pontos do hiperbolóide $x^2 - y^2 + 2z^2 = 1$ onde a reta normal é paralela à reta que une os pontos $(3,-1,0)$ e $(5,3,6)$.

9. Seja $a > 0$ e considere o plano tangente à superfície $xyz = a$ num ponto do primeiro octante. Mostre que o tetraedro formado por este plano e os planos coordenados tem volume independente do ponto de tangência.

10. Mostre que o elipsóide $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ e a esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24 = 0$ se tangenciam no ponto $(1, 1, 2)$ (isto é, que elas têm o mesmo plano tangente neste ponto).

11. Verifique que as superfícies $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ possuem vetores normais mutuamente ortogonais em todos os pontos da interseção.

12. Ache um vetor tangente à interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$ no ponto $(-1, 1, 2)$.

13. Ache a reta da tangente à interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 2$ com gráfico de $f(x, y) = x^3 + y^3 + 2$ no ponto $(1, 1, 4)$.

14. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, diferenciáveis com $\nabla f(1, 0) = (2, 1)$ e $\gamma'(t) \neq (0, 0, 0)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Suponha que a imagem de γ esteja contida na interseção do gráfico de f com a superfície $z^3 + x^3 + yz + xy^3 = 0$. Sabendo que $(1, 0, -1) \in \text{Im}\gamma$, determine uma equação para a reta tangente a γ neste ponto.

15. Seja $f(x, y)$ uma função de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$.
(a) Mostre que o gráfico de f coincide com uma superfície de nível da função de 3 variáveis $G(x, y, z) = f(x, y) - z$.
(b) Mostre que o plano tangente a f em $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ e o plano tangente a superfície de nível de G neste mesmo ponto coincidem.

Algumas respostas:

I. **1.** $\nabla f(2, 1) = (4, 8)$ e a reta é $x + 2y - 4 = 0$. **2.** $X = (\pm 1, \pm 2) + \lambda(5, -4), \lambda \in \mathbb{R}$. **3.** (c)
4. $(1, 4)$ **5.** $X = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) + \lambda(-1, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$. **6.** $(2, -1)$ e $(10/9, -7/27)$.

II. **8.** $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **12.** $(5, 8, 6)$. **13.** $X = (1, 1, 4) + \lambda(-1, 1, 0), \lambda \in \mathbb{R}$.
14. $X = (1, 0, -1) + \lambda(2, -9, -5), \lambda \in \mathbb{R}$.