MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Bacharelado em Matemática - 2011

4ª lista de exercícios

I. Plano tangente e reta normal

1. Ache a equação do plano tangente e a equação da reta normal a cada superfície no ponto indicado:

   (a) $z = e^{x^2+y^2}$, no ponto $(0,0,1)$. (b) $z = \ln(2x+y)$, no ponto $(-1,3,0)$.
   (c) $z = x^2 - y^2$, no ponto $(-3,-2,5)$. (d) $z = e^x \ln y$, no ponto $(3,1,0)$.

2. Determine o plano que passa por $(1,1,2)$ e $(-1,1,1)$ e é tangente ao gráfico de $f(x,y) = xy$. Existe mesmo só um?

3. Determine a equação do plano que passa pelos pontos $(0,1,5)$ e $(0,0,6)$ e é tangente ao gráfico de $g(x,y) = x^3 y$.

4. Determine $k \in \mathbb{R}$ para que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + ky^2)$ no ponto $(2,1,f(2,1))$ seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que todos os planos tangentes à superfície $z = xf\left(\dfrac{x}{y}\right)$ passam pela origem.

II. Regra da Cadeia

6. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação.

   (a) $z = \operatorname{sen} xy; x = 3t, y = t^2$. (b) $z = x^2 + 3y^2; x = \operatorname{sen} t, y = \cos t$.
   (c) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1); x = \operatorname{sen} 3t, y = \cos 3t$.

7. Seja $g(t) = f(3t, 2t^2 - 1)$, onde $f(x,y)$ é diferenciável.

   (a) Expresse $g'(t)$ em temos das deridas parciais de f.
   (b) Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = \dfrac{1}{3}$, calcule $g'(0)$.

8. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $g(t) = f(2t^3 - 4t, t^4 - 3t)$. Sabendo que $\nabla f(-2,-2) = (a,-4)$, determine a para que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 1 seja paralela à reta $y = 2x + 3$.

9. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

   (b) Mostre que $\dfrac{d}{dt} f\big(\gamma(t)\big) \neq \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$ em $t=0$, onde $\gamma(t) = (-t,-t)$.

   (c) É f diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

10. Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial t}$ e $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ pela regra da cadeia e confira os resultados por meio de substituição seguida de aplicação das regras de derivação parcial.

    (a) $w = x^2+y^2; x = t^2+u^2, y = 2tu.$ (b) $w = \dfrac{x}{x^2+y^2}; x = t\cos u, y = t \operatorname{sen} u.$

11. Seja $f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e sejam a, b, c, d constantes tais que $a^2+b^2 = 1$, $c^2+d^2 = 1$ e $ac+bd = 0$. Seja $g(u,v) = f(au+bv, cu+dv)$. Mostre que:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(au+bv, cu+dv) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(au+bv, cu+dv).$$

12. Seja $f = f(x,y)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(u,v) = uf(u^2-v, u+2v)$.

    (a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em função das derivadas parciais de f.

    (b) Sabendo que $3x+5y = z+26$ é o plano tangente ao gráfico de f, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$.

13. Seja $F(r,s) = G(\mathrm{e}^{rs}, r^3\cos(s))$, onde $G = G(x,y)$ é uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

    (a) Calcule $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(r,s)$ em função das derivadas parciais de G.

    (b) Determine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2}(1,0)$ sabendo que $\dfrac{\partial G}{\partial y}(t^2+1, t+1) = t^2 - 2t + 3$.

Algumas respostas

1) (a) $z = 1$; $X = (0,0,1) + \lambda(0,0,1), \lambda \in \mathbb{R}$;
(b) $2x + y - z - 1 = 0$; $X = (-1,3,0) + \lambda(2,1,-1), \lambda \in \mathbb{R}$;
(c) $6x - 4y + z + 5 = 0$; $X = (-3,-2,5) + \lambda(6,-4,1), \lambda \in \mathbb{R}$;
(d) $e^3 y - z - e^3 = 0$; $X = (3,1,0) + \lambda(0,e^3,-1), \lambda \in \mathbb{R}$.

2) $x + 6y - 2z - 3 = 0$ (sim, só um) 3) $6x - y - z + 6 = 0$ 4) $k = 8$ 7) (b) 1 8) $a = 3$
9) (a) $\nabla f(0,0) = (1,1)$ (c) Não. 12) (b) 21
13)(a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial r^2} = s^2 \mathrm{e}^{2rs} \dfrac{\partial^2 G}{\partial x^2} + 6r^2 \mathrm{e}^{rs} s \cos s \dfrac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + 9r^4 \cos^2 s \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} + s^2 \mathrm{e}^{rs} \dfrac{\partial G}{\partial x} + 6r \cos s \dfrac{\partial G}{\partial y}$; (b)0.