MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Bacharelado em Matemática - 2011

3ª lista de exercícios

I. Superfícies e curvas no $\mathbb{R}^3$

1. Em cada caso, esboce a superfície formada pelo conjunto dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:
   (a) $z + 2y + 3z = 1$ (b) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ (c) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
   (d) $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ (e) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (f) $x^2 - y^2 = 1$
   (g) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

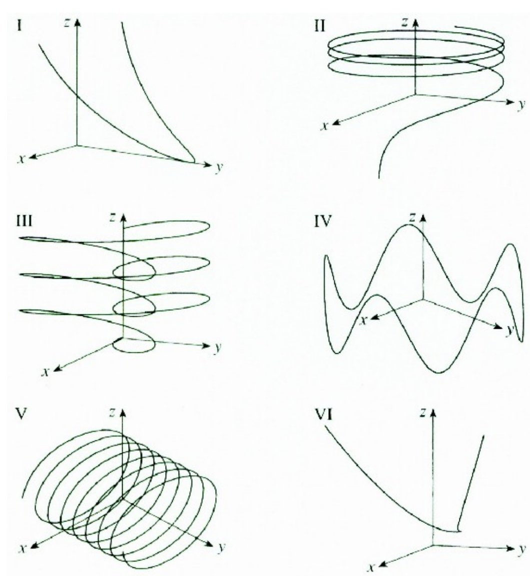
   Alguma dessas superfícies é o gráfico de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$?

2. Verifique que a imagem da curva $\gamma(t) = (\cos t, \cos t, \sqrt{2}\operatorname{sen} t)$, $t \in [0, \pi[$, está contida numa esfera com centro em $(0, 0, 0)$ e esboce a imagem de γ.

3. Seja $\gamma(t) = (\sqrt{t^2 + 1}\cos t, \sqrt{t^2 + 1}\operatorname{sen} t, t)$, $t \in \mathbb{R}$. Verifique que a imagem de γ está contida na superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Esboce a imagem de γ.

4. Associe as equações com os esboços das imagens. Justifique a sua escolha:

   (a) $\gamma(t) = (\cos 4t, t, \operatorname{sen} 4t)$ (b) $\gamma(t) = (t^2 - 2, t^3, t^4 + 1)$
   (c) $\gamma(t) = (t, \frac{1}{1+t^2}, t^2)$ (d) $\gamma(t) = (\operatorname{sen} 3t \cos t, \operatorname{sen} 3t \operatorname{sen} t, t)$
   (e)$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \ln t)$ (f) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 5t)$



5. Desenhe as imagens das seguintes curvas:

   (a) $\gamma(t) = (1, t, 1)$ (b) $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$

   (c) $\gamma(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\operatorname{sen} t, e^{-t}),\ t \geq 0$ (d) $\gamma(t) = (t, \cos t, \operatorname{sen} t),\ t \geq 0$

   (e)$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$ (f) $\gamma(t) = (1 + \operatorname{sen} t, 1 + \operatorname{sen} t, \cos t)$

II. Funções de duas variáveis

6. Ache e esboce o domínio das funções:

   (a) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ (b) $f(x, y) = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$

   (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ (d) $f(x, y) = \dfrac{x}{y^x}$

7. Esboce os gráficos de:

   (a) $f(x, y) = 1 - x - y$ (b) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ (c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 9y^2}$

   (d) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ (e) $f(x, y) = y^2 - x^2$ (f) $f(x, y) = y^2 + 1$

   (g) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2y + 3$ (h) $f(x, y) = xy$ (i) $f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

   (j) $f(x, y) = \dfrac{1}{4x^2 + 9y^2}$ (k) $f(x, y) = (x - y)^2$

8. Esboce uma família de curvas de nível de:

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$ (b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - y^2}$ (c) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 - y^2}$

9. Seja $\gamma(t) = (e^t + 1, e^{-t})$, para $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Desenhe a imagem de γ indicando o sentido de percurso.

   (b) A imagem de γ está contida na curva de nível de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^2 - 2y - y^2 + 4$? Em caso afirmativo, em qual nível?

10. Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$ e seja $\gamma(t) = (t\ \cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2 + 4}),\ t \geq 0$.

    (a) Mostre que a imagem de γ está contida no gráfico de f.

    (b) Faça um esboço da imagem de γ.

11. Encontre uma parametrização para a curva de nível no nível k de f nos casos:

    (a) $f(x, y) = x + 2y - 3,\ k = -2;$ (b) $f(x, y) = x - \sqrt{1 - 2y^2},\ k = 5;$

    (c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 - y^2},\quad k = 1.$

    Encontre a reta tangente às curvas dos itens (a), (b) e (c) acima nos pontos $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, $(6, 0)$ e $(\sqrt{2}, 1)$, respectivamente.

III. Limite e continuidade

12. Mostre, usando a definição de limite, que:

    (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} y = b$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} 2x + y = 2a + b$

13. Prove que se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L > 0$, então existe $r > 0$ tal que $|f(x,y)| > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $\|(x,y) - (a,b)\| < r$.

14. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

    (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

    (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{2x^4+x^2y+y^2}$

    (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+4y^2}{3x^2+5y^2}$ (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

    (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3-y}$ (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4\,\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^4+y^2}$

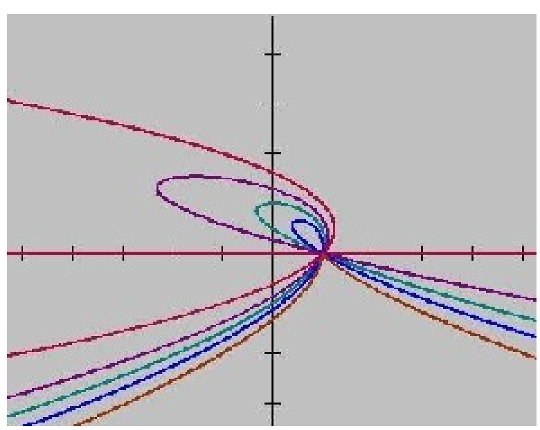
    (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^3}{x^2+y^2}$ (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

    (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+y^4+x^4}{x^3-xy^3}$ (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+\mathrm{sen}\,(x^2+y^2)}{y^4+\mathrm{sen}\,(x^2+y^2)}$

15. Calcule os seguintes limites:

    (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

16. O domínio de uma função f é o conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x,y) \neq (1,0)\}$. A figura abaixo mostra as curvas de nível de f nos níveis $k=0$, $k=0,3$, $k=0,5$, $k=0,7$ e $k=1$. Existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$? Justifique.



17. Determine os pontos de continuidade da seguinte função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2-y^2)(x-1)^2}{(x^2+y^2)[(x-1)^2+(y-1)^2]} & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0) \text{ e } (x,y) \neq (1,1), \\ 1 & \text{se } \ (x,y) = (0,0), \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

IV. Derivadas parciais e diferenciabilidade

18. Ache as derivadas parciais de primeira ordem das funções:
(a) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (b) $f(x,y) = \ln(1+\cos^2(xy^3))$

19. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem de:
(a) $u(x,y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ (b) $u(x,y) = f(ax+by)$, onde a e b são constantes.

20. Dada a função $f(x,y) = x(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}\, e^{\operatorname{sen}(x^2y)}$, ache $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)$.

Sugestão: Neste caso, usar a definição de derivada parcial é menos trabalhoso do que aplicar as regras de derivação.

21. Verifique que a função $u(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ é solução da equação de Laplace bidimensional: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

22. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, deriváveis até $2^{\underline{a}}$ ordem.

(a) Mostre que $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

(b) Mostre que $u(x,y) = xf(x+y) + yg(x+y)$ é solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

23. Sejam $f(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ e $g(x,y) = |xy|^{\frac{5}{4}}$. Mostre que f e g são de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^2$.

24. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} + \operatorname{sen}(x+3y) & \text{se } \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ existem em todos os pontos.

(b) f é contínua em (0,0)? (c) f é diferenciável em (0,0)?

25. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é contínua em (0,0). (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) É f diferenciável em $(0,0)$? (d) São $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ contínuas em $(0,0)$?

26. Considere $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que f é diferenciável em $(0,0)$.

(b) As derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $(0,0)$?

27. Seja $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\,\text{sen}\,((x^2+y^2)^2)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que f é contínua em $(0,0)$. (b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y), (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$? Justifique.

(d) A função f é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

28. Seja $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Verifique que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -y$ para todo y, e que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = x$, para todo x.

(b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

29. Determine o conjunto de pontos de $\mathbb{R}^2$ onde f **não** é diferenciável nos seguintes casos:

(a) $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ (b) $f(x,y) = x|y|$

(c) $f(x,y) = \mathrm{e}^{\sqrt{x^4+y^4}}$ (d) $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$

Algumas respostas

1. Apenas a superfície do item (a).

6. (a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq x\}$, (b) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$,
(c) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$, (d) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$

9. (b) Sim, no nível 5.

14. (a) não existe (b) 0 (c) 0 (d) não existe (e) não existe (f) não existe
(g) não existe (h) 0 (i) 0 (j) 0 (k) não existe (l) 1

15. (a) 1 (b) 0 16. Não

17. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$

18) (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

19) (a) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y} f'\left(\frac{x}{y}\right)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right)$;

(b) $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = a f'(ax+by)$; $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = b f'(ax+by)$.

20) -2 24) Não é contínua nem diferenciável em $(0,0)$.

25) (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. (c) Não. d) $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são ambas descontínuas em $(0,0)$.

26) (b) Não

27) (b) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^2y(x^2+y^2)^2\cos((x^2+y^2)^2) - 2x^2y\,\mathrm{sen}((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(c) Sim. (d) Sim.

29) (a) f não é diferenciável em nenhum ponto da reta $y = -x$.

(b) f não é diferenciável nos pontos da forma $(a,0)$ com $a \neq 0$.

(c) f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ pois é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$. (d) O mesmo que o item (c).