MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Bacharelado em Matemática - 2011

2ª lista de exercícios

I. Integrais impróprias

1. Calcule as seguintes integrais imprópias:

   a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$;   b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$;   c) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$;   d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|}\,dx$;   e) $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^x\,dx$.

2. Mostre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx$ converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$.

3. Decida se as integrais imprópria abaixo são convergentes ou divergentes

   a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5+3x+1}\,dx$;   b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}\,dx$;   c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$;   d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

II. Conjuntos abertos e fechados

1. Verifique quais conjuntos são abertos e quais são fechados em $\mathbb{R}^2$. Desenhe tais conjuntos.

   a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq 1\}$;
   b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y = 1\}$;
   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 \text{ e } 1 < y < 2\}$;
   d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\}$;
   e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \text{ e } x+y > 1\}$;
   f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \text{ e } y \text{ são inteiros}\}$,
   g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \text{ é racional}\}$.

2. O mesmo para os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^3$.

   a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \leq 1\}$;
   b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 1\}$;
   c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1\}$;
   d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz > 0\}$;
   e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$;
   f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \text{ e } y \text{ são inteiros}\}$,
   g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ e } x+y > 1\}$;
   h) $\{(t,2t,3t) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$.

III. Curvas Planas

1. Desenhe as imagens das seguintes curvas planas:

   (a) $\gamma(t) = (1,t)$
   (b) $\gamma(t) = (\cos^2 t, \mathrm{sen}t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$
   (c) $\gamma(t) = (\mathrm{sen}t, \mathrm{sen}^2 t)$
   (d) $\gamma(t) = (2+\cos t, 3+4\mathrm{sen}t)$
   (e) $\gamma(t) = (\frac{1}{2}, 1-t)$
   (f) $\gamma(t) = (e^t\cos t, e^t\,\mathrm{sen}t)$, $t \geq 0$
   (g) $\gamma(t) = (\sec t, \mathrm{tg}t)$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$
   (h) $\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\mathrm{sen}t)$

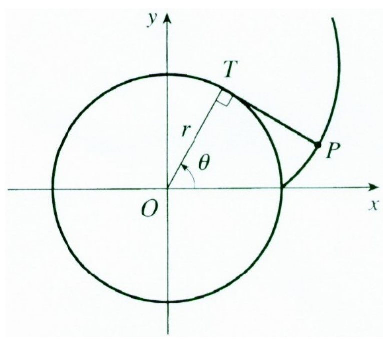
2. Considere $f(x) = (\sqrt[3]{x})^2$. A função f é derivável em $x = 0$? Determine uma curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, derivável e cuja imagem seja igual ao gráfico de f.

3. Mostre que a curva $\gamma(t) = (\cos t\,,\, \mathrm{sen}\, t \cos\, t)$ tem duas tangentes em (0,0) e ache suas equações.

4. Sejam I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ uma curva diferenciável. Mostre que, se existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $||\gamma(t)|| = C$, para todo $t \in I$, então $\gamma(t)$ é ortogonal a $\gamma'(t)$, para todo $t \in I$. Vale a recíproca? Interprete geometricamente.

5. Um barbante é enrolado ao redor de um círculo e então desenrolado, sendo mantido esticado. A curva traçada pelo ponto P no final do barbante é chamada de **involuta** do círculo. Se o círculo tiver raio r e centro O, a posição inicial de P for $(r, 0)$, e se o parâmetro θ for escolhido como na figura, mostre que as equaçõoes paramétricas da involuta são:

$$x = r(\cos\theta + \theta\mathrm{sen}\theta) \qquad y = r(\mathrm{sen}\theta - \theta\cos\theta)$$



6. Uma circunferência de raio r rola sem escorregar ao longo do eixo Ox. Encontre equações paramétricas para a curva descrita por um ponto da circunferência que se encontra inicialmente no origem. (Esta curva é chamada de ciclóide; veja figura.)