MAT121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Bacharelado em Matemática - 2011

1^{a} lista de exercícios

I. Integrais definidas e aplicações

1. Calcule as seguintes integrais definidas:

   a) $\displaystyle\int_1^3 \ln x\, dx$; b) $\displaystyle\int_0^\pi \text{sen}^2 x\, dx$; c) $\displaystyle\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+1}\, dx$; d) $\displaystyle\int_0^\pi |\cos x|\, dx$; e) $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{e}} \frac{1}{x}\, dx$.

2. Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de

   $$f(x) = x^3 - 2x + 1 \text{ e } g(x) = -x + 1,$$

   com $-1 \leq x \leq 1$.

3. Desenhe a região $A = B \cap C \cap D$ e calcule a área de A, onde

   $$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq x^2 - 4\},\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 12 - 3x^2\} \text{ e}$$

   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 3x^2 + 12x + 12\}.$$

4. Sejam $f : [-1,3] \to \mathbb{R}$ contínua com $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [-1,3]$,

   $$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \geq f(x)\} \text{ e } B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 3 \text{ e } y \leq x^2 + 3\}$$

   tais que a área de $A \cap B$ seja igual a 23. Calcule $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\, dx$.

5. Determine $m > 0$ para que a área delimitada por $y = x^2$, $y = \dfrac{x^2}{2}$ e a reta $y = mx$ seja igual a 4.

6. Desenhe a região do plano delimitada pela curva $y = x^3 - x$ e por sua reta tangente no ponto de abscissa $x = -1$. Calcule a área desta região.

7. Encontre a área da região limitada entre as curvas $x = y^3 - y$ e $x = 1 - y^4$.

8. Calcule a área delimitada pela elipese de equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

9. Determine o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox do conjunto

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy \leq 2,\ x^2 + y^2 \leq 5 \text{ e } x > 0\}$.

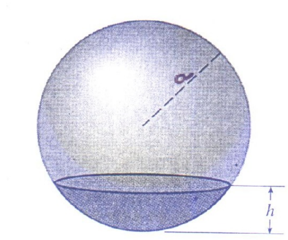
   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq \sqrt{x} \text{ e } (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

   c) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \text{ e } e^{-x} \leq y \leq e^x\}$.

10. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno da reta $y = 3$ da região delimitada pelas parábolas $y = x^2$ e $y = 2 - x^2$.

11. O disco $x^2 + y^2 \leq a^2$ é girado em torno da reta $x = b$, com $b > a$, para gerar um sólido, com a forma de um pneu. Esse sólido é chamado **toro**. Calcule seu volume.

12. Calcule o volume de uma calota esférica de altura h, $h \leq a$, de uma esfera de raio a.



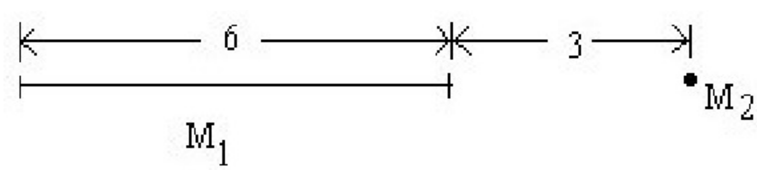
13. Determine o comprimento da curva $y = \cosh x$, $-3 \leq x \leq 4$.

14. Calcule o comprimento do gráfico de $f(x) = \ln(\cos x)$, para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

15. Sabe-se que a intensidade da força de atração entre duas partículas é dada por

$$F = \frac{Cm_1 m_2}{d^2}$$

onde C é uma constante, m_1 e m_2 são as massas das partículas e d é a distância entre elas. Uma barra linear homogênea de massa $M_1 = 18kg$ e uma massa pontual $M_2 = 2kg$ estão dispostas como na figura. Calcule a intensidade da força de atração entre as duas massas.



II. Função dada por Integral

1. Esboce o gráfico da função $G(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$, onde $f(t) = \begin{cases} x^2, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$. Existe $G'(1)$?

2. Calcule $g'(x)$ onde

(a) $g(x) = \displaystyle\int_{\cos x}^{\mathrm{sen}x} e^{t^2}\,dt$ (b) $g(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \mathrm{sen}(t^2)\,dt$

3. Seja f uma função contínua em um intervalo $[a,b]$ e sejam $u(x)$ e $v(x)$ funções diferenciáveis cujos valores estão em $[a,b]$. Prove que

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v(x))\frac{dv}{dx} - f(u(x))\frac{du}{dx}.$$

A fórmula acima é conhecida como *Regra de Leibnitz*.

4. Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{\frac{x^2-t^2}{2}}\,dt$. Mostre que $f'(x) - xf(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

5. Seja f uma função contínua em um intervalo I contendo a origem e seja

$$y = y(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(x-t)f(t)\,dt$$

Prove que $y'' + y = f(x)$ e $y(0) = y'(0) = 0$, para todo $x \in I$.

6. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2}\cos(t^2)\,dt}{\int_0^x e^{-t^2}\,dt}$.

7. Mostre que $f(x) = \displaystyle\int_0^{1/x} \frac{1}{t^2+1}\,dt + \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$ é constante em $(0,\infty)$. Qual o valor dessa constante?

8. Seja $F : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t^3-1}dt$.

   (a) Calcule o comprimento do gráfico de F entre $x = 1$ e $x = 4$.

   (b) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{F(x^3) - F(8)}{\operatorname{sen}(x-2)}$

Algumas respostas:

I.

1. a) ln27-2 b) $\frac{\pi}{2}$; c) $\frac{1-\sqrt{8}}{3}$; d) 2; e) -1.

2. $\dfrac{1}{2}$ **3.** $\dfrac{104}{3}$ **4.** $-\dfrac{5}{3}$ **5.** $m = 2$ **6.** $\dfrac{27}{4}$ **7.** $\dfrac{8}{5}$ **8.** πab **9.** a) $\frac{5\sqrt{5}-2}{3}\pi$. b) $\frac{\pi}{6}$ c) $\frac{\pi}{2}(e^2 - e^{-2})^2$

10. $\frac{32}{3}\pi$. **11.** $(2\pi b)(\pi a^2)$. **12.** $\pi h^2(a - \frac{h}{3})$. **13.** $\operatorname{senh}4 + \operatorname{senh}3$. **14.** $\ln(1+\sqrt{2})$. **15.** $\frac{4}{3}C$.

II.

6. 0 **7.** $\frac{\pi}{2}$