Apostila para MAC 118
Sobre o uso do MuPAD na introdução do conceito de convergência e divergência

http://www.ime.usp.br/~leo/mac118/00
http://www.matematica.br
21 de novembro de 2000

1 Objetivos

O objetivo deste trabalho é a elaboração de uma apostila, dirigida a um professor de Matemática do ensino médio, que empregue o método em estudo na disciplina MAC118. Portanto, na apostila deverá estar claramente indicado o roteiro de aula que o professor[1] deverá seguir, inclusive dicas de como poderá ajudar os alunos[2] quando estes não conseguirem dar seguimento às suas descobertas (pesquisa).

O assunto da apostila será **sequências**, **séries**, **convergência** e **divergência**, utilizando o MuPAD, para que os alunos elaborem conjecturas e "construam" os conceitos. Além disso, deverá aparecer o uso de **indução**, pelo menos em algumas demonstrações do que foi conjecturado pelos alunos.

2 Formato da apostila

Resumidamente, podemos dizer que o formato desta apostila deverá ser tal que o professor, ao usá-la, não tenha dúvidas a respeito de como deverá ser sua aula para que possa atingir os objetivos acima traçados. Nesse sentido, você deverá fornecer todo o roteiro da aula (como e o que apresentar, e quando!), incluindo dicas que o professor possa utilizar para ajudar os alunos (nunca esquecendo o mote: "ajudar sem resolver" - cabe ao aluno encontrar suas soluções).

Utilize como modelo a apostila de *Ordenação* ("Uma introdução 'concreta' ao conceito de algoritmo") ou a de *Mosaico* ("Construindo alguns mosaicos").

Sugerimos que sua apostila seja dividida em seções, tendo inicialmente um **Resumo** e uma **Introdução**. As demais seções devem ser elaboradas de acordo com a aula que proporão ao professor.

Na introdução deverá ser apresentada uma breve descrição do MuPAD e de seus recursos ligados ao estudo de séries, como por exemplo, **variáveis**, **expressões**, **sequências**, **listas**, **somatória**, comandos **for** e **if**, **infinito** e **limite**. O professor também deverá ser advertido de quais os pré-requisitos que espera-se que os alunos tenham (o que o professor já precisaria ter introduzido em aulas anteriores).

Vale destacar que, como o objetivo da apostila é introduzir os conceitos de sequências e séries, certamente esperamos que os alunos ainda não saibam, por exemplo, P.A. e P.G.. O conceito de indução também deverá ser introduzido (naturalmente a partir de sequências), mas sugerimos que seja de modo mais intuitivo (vide subseção**??**).

Nas demais seções, deverá ser descrito claramente como o professor deve introduzir o programa MuPAD, e qual a sequência de atividades que ele proporá. Sugerimos que dividam a apostila em duas grandes atividades, a primeira sobre sequência e a segunda sobre séries. Os alunos deverão começar a conceituar **convergência** e **divergência** a partir da primeira parte.

[1] Deste ponto em diante, sempre que nos referirmos genericamente ao *professor*, nos referimos ao *leitor de sua apostila*.
[2] Do mesmo modo, ao nos referirmos ao *aluno*, deve ser entendido o *aluno de seu leitor*.

3 Algumas dicas sobre a Matemática envolvida

Para ficarem mais claros os conceitos que desejamos que o professor introduza, faremos uma rápida explanação a respeito de um deles. Se você ainda tiver dúvidas a respeito, pode saná-las em qualquer livro de Cálculo I. Se ainda não conseguir, consulte as monitoras de MAC118 ou tragam suas questões nos inícios de aula (**atenção**, esperamos que de fato, procurem sanar suas dúvidas sozinhos antes de trazê-las para as monitoras ou sala de aula).

É importante que explique os conceitos envolvidos ao professor (deixando isso claro - não é para que o professor simplesmente exponha aos alunos esta explicação). Sobre o conceito de **indução**, recomendamos que apenas exponha o Teorema Fundamental da Indução e como usá-lo.

3.1 Sequências e convergência

Dizemos que uma sequência real (com valores reais) $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *converge* para $\overline{x} \in \mathbb{R}$ (tem *limite* $\overline{x} \in \mathbb{R}$),

$$\lim_{i\to\infty} x_i = \overline{x}.$$

se: para todo $\epsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$, para o qual

$$|x_i - \overline{x}| < \epsilon, \quad \forall i \geqq N.$$

Podemos enunciar este conceito de modo mais informal: se $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge para $\overline{x}$, então os termos de maior índice ficam arbitrariamente próximos do limite $\overline{x}$.

3.2 Séries e sequências

Convergência de série é análogo, uma vez que podemos ver uma série como termos de sequência: dada qualquer série $\sum_{i=1}^{n} x_i$, podemos definir a sequência $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ como

$$y_n := \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.3 Grau de formalismo a ser cobrado

É interessante que a apostila deixe claro para o professor que o grau de formalismo que ele cobrará da turma dependerá do grau de compreensão da mesma. É necessário ponderar até onde (ou o que) deve ser discutido.

É importante que seja ressaltada na apostila, a vantagem de se usar o MuPAD (e consequentemente o computador), frisando que este facilita a intuição. Por exemplo, bastaria você propor atividades de modo que o aluno perceba que a sequência está convergindo para algum valor específico (seu limite) e sugira que o professor indague sobre os conceitos envolvidos.

Algumas peguntas que podem ser utilizadas: o que significa esta "tendência"? como o aluno pode convencer alguém deste fato? será que não existe uma distância mínima entre a sequência e o suposto limite?

Note que a última pergunta "força" a necessidade da definição formal (ou intuitiva) de convergência, pois para responder negativamente a esta pergunta é necessário convencer a todos que:

> qualquer que seja a distância dada ($D > 0$) existe um termo (x_N, $N \in \mathbb{N}$) a partir do qual a distância entre os termos subsequentes e o suposto limite é menor que a distância dada ($|x_i - \overline{x}| < D$, $\forall i \geqq N$).