MAT0222 -Álgebra Linear II
2013

FORMA DE JORDAN PARA OPERADORES NILPOTENTES

TEOREMA: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita $n > 0$ e seja $N \in L(V)$ um operador linear nilpotente com polinômio minimal $m_N(X) = X^m$. Então existem inteiros $p > 0$ e $r_1 = m \geq r_2 \geq ... \geq r_p \geq 1$ com $\sum_{i=1}^{n} r_i = n$, e vetores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$ tais que

$$B = \{v_1, Nv_1, ..., N^{r_1-1}v_1, v_2, Nv_2, ..., N^{r_2-1}v_2, ..., v_p, Nv_p, ..., N^{r_p-1}v_p\}$$

é uma base de V. Além disso, os inteiros $p > 0$ e $r_1 = m \geq r_2 \geq ... \geq r_p \geq 1$ são únicos, embora os vetores $v_1, v_2, ..., v_p$ não sejam únicos.

Demostração: Vamos demonstrar os seguintes lemas:

LEMA 1: Sejam $v_1, ..., v_s$ LI módulo W =KerN^{m-1}. Então os vetores

$$v_1, Nv_1, ..., N^{m-1}v_1, v_2, Nv_2, ..., N^{m-1}v_2, ..., v_s, Nv_s, ..., N^{m-1}v_s$$

são LI.

Demostração: Suponha que

$$a_{11}v_1 + a_{12}Nv_1 + ... + a_{1m}N^{m-1}v_1 + a_{21}v_2 + a_{22}Nv_2 + ... + a_{2m}N^{m-1}v_2 + ... + a_{s1}v_s + a_{s2}Nv_s + ... + a_{sm}N^{m-1}v_=0.$$

Aplicamos N^{m-1} aos dois lados dessa igualdade e obtemos

$$a_{11}N^{m-1}v_1 + ... + a_{s1}N^{m-1}v_s = 0 \Rightarrow N^{m-1}(a_{11}v_1 + ... + a_{s1}v_s) = 0 \Rightarrow a_{11}v_1 + ... + a_{s1}v_s \in \text{Ker}N^{m-1}.$$

Como $v_1, ..., v_s$ são LI módulo W =KerN^{m-1}, temos que $a_{11} = ... = a_{s1} = 0$. Agora, aplique N^{m-2} aos dois lados de

$$a_{12}Nv_1 + ... + a_{1m}N^{m-1}v_1 + a_{22}Nv_2 + ... + a_{2m}N^{m-1}v_2 + ... + a_{s2}Nv_s + ... + a_{sm}N^{m-1}v_=0$$

e obtenha $a_{12}N^{m-1}v_1 + ... + a_{s2}N^{m-1}v_s = 0$ o que implica que $a_{12} = ... = a_{s2} = 0$. Daqui já dá para ver como terminar a demonstração!!!!

LEMA 2: Com as mesmas notações do LEMA 1, seja

$$U = [v_1, Nv_1, ..., N^{m-1}v_1, v_2, Nv_2, ..., N^{m-1}v_2, ..., v_s, Nv_s, ..., N^{m-1}v_s].$$

Então existe um subespaço S de V invariante sob N tal que $V = U \oplus S$.

Demostração: A demonstração é por indução em n = dim$V$. Se $n = 1$ não temos nada a fazer! Admita então que $n > 1$ e que o resultado do Lema 2 seja válido para espaços vetoriais de dimensão menor do que n. Seja W =KerN^{m-1}, sejam $v_{s+1}, ..., v_t \in V$ com $v_1, ..., v_t$ LI módulo W e t =dim$V-$dim$W$. Assim $V = [v_1, ..., v_t] \oplus W$. Seja N_1 a restrição de N a W. Então N_1 é nilpotente de índice $m - 1$ e os vetores $Nv_1, ..., Nv_t \in W$ são LI módulo W_1 =Ker N^{m-2} (pelo Lema 1, verifique). Como dim$W <$ dim$V$, pela hipótese de indução temos que existe S_1 subespaço de W invariante sob N_1 tal que $W = S_1 \oplus U_1$, onde

$$U_1 = [Nv_1, ..., N^{m-1}v_1, Nv_2, ..., N^{m-1}v_2, ..., Nv_t, ..., N^{m-1}v_t].$$

Assim

$$V = [v_1, ..., v_t] \oplus W = [v_1, ..., v_t] \oplus U_1 \oplus S_1 = U \oplus S,$$

onde

$$S = [v_{s+1}, Nv_{s+1}, ..., N^{m-1}v_{s+1}, ..., v_t, Nv_t, ..., N^{m-1}v_t] \oplus S_1.$$

Demonstração do Teorema

A demonstração é por indução em dim$V = n$. Se $n = 1$ não temos nada para fazer! Admita então que $n > 1$ e que o Teorema seja verdadeiro para espaços vetoriais de dimensão menor do que n. Seja novamente $W =$KerN^{m-1} e $v_1, ..., v_t$ LI módulo W com $t =$dim$V-$dim$W$. Pelo Lema 2, existe S subespaço de V invariante sob N, tal que $V = U \oplus S$ onde

$$U = [v_1, Nv_1, ..., N^{m-1}v_1, v_2, Nv_2, ..., N^{m-1}v_2, ..., v_t, Nv_t, ..., N^{m-1}v_t].$$

A restrição de N a S é nilpotente de índice $l \leq m$. Como dim$S <$dim$V$, pela hipótese de indução, existem um inteiro $q > 0$ e inteiros $l_1 = l \geq l_2 \geq ... \geq l_q \geq 1$, e vetores $u_1, ..., u_q \in S$ tais que

$$\{u_1, Nv_1, ..., N^{l_1-1}u_1, u_2, Nv_2, ..., N^{l_2-1}u_2, ..., u_q, Nv_q, ..., N^{l_q-1}v_q\}$$

é uma base de S. Agora faça $p = t + q$, e para $i = 1, ..., q$ faça $r_{i+t} = l_i$, $v_{i+t} = u_i$. Assim temos os inteiros p, e r_i e os vetores $v_i, i = 1, ..., p$ como queríamos!

Demonstração da unicidade de $p, r_1, ..., r_p$

Sejam p e $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r_p$ e vetores $v_1, ..., v_p$ como no Teorema. É claro que r_1 é o índice de nilpotência de N. Se $r_1 = 1$ então $p = n$ e $r_1 = r_2 = ... = r_p = 1$. Assuma então que $r_1 > 1$ e que a unicidade é verdadeira para espaços vetoriais de dimensão menor do que n , já que, novamente, o caso $n = 1$ é trivial.

Seja $W =$KerN^{r_1-1}. Seja $J = \{i : r_i = r_1\}$ e seja $k = |J|$. Temos então que $r_1 = r_2 = ... = r_k > r_{k+1}$. Vamos mostrar que $k =$dim$V-$dim$W$. Primeiro, os vetores $v_1, ..., v_k$ são LI módulo W pois se $a_i, i = 1, ..., k$ são tais que $a_1v_1 + a_2v_2 + ... + a_kv_k \in W$ então $a_1N^{r_1-1}v_1 + ... + a_kN^{k-1}v_k = 0$ o que implica que $a_1 = a_2 = ... = a_k = 0$ pois B é uma base de V.

Agora, seja $v \in V$. Vamos mostrar que $v, v_1, ..., v_k$ são LD módulo W. Para isso, escreva v como combinação linear da base B. Como $N^{r_1-1}v_i = 0$ para $i = k + 1, ..., p$ (pois $r_i < r_1$) e para $j \geq 1$, $N^{r_1-1}(N^jv_i) = 0$ para todo $i = 1, ..., p$, temos que v - (combinação linear de $v_1, ..., v_k$) está em W . Logo k é o número máximo de vetores LI módulo W.

A seguir, considere a restrição N_1 de N a W que é nilpotente de índice $r_1 - 1$. Os vetores $u_1 = Nv_1, ..., u_k = Nv_k, v_{k+1'}, ..., v_p$ estão em W e têm a propriedade de que $N_1^{r_1-1}u_1, = ..., N_1^{r_1-1}u_k = 0$, $N_1^{r_{k+1}}v_{k+1} = ... = N_1^{r_p}v_p = 0$ onde $r_1 - 1 \geq ... \geq r_k - 1 \geq r_{k+1} \geq ... \geq r_p$ e sua soma é $n - k =$dim$W$. Temos também que os vetores

$$u_1, N_1u_1, ..., N_1^{r_1-2}u_1, ..., u_k, N_1u_k, ..., N_1^{r_1-2}u_k, v_{k+j}, N_1v_{k+j}, ..., N_1^{r_{k+j}-1}v_{k+j}, j = 1, ..., p - k$$

formam uma base de W. Pela hipótese de indução temos que os inteiros $p, r_1 - 1, ..., r_k - 1, r_{k+1}, ..., r_p$ são determinados de modo único por N_1. Como W, $k =$dim$V-$dim$W$ e N_1 são determinados unicamente por N, temos que $p, r_1, ..., r_p$ são determinados unicamente por N.