

MAT0222 - Álgebra Linear II

Prova Substitutiva- 27/06/2013

Nome : _____
 N^oUSP : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Atenção:

1. Leia os enunciados com atenção.
2. Justifique todas as suas afirmações.
3. BOA PROVA!

1. (1,5) Classifique, a menos de semelhança, as matrizes reais 7×7 com polinômio característico

$$p(X) = (X - 2)^5(X - 1)^2.$$

Temos as seguintes possibilidades para o polinômio minimal:

- (1) $m(x) = (x-2)(x-1)$ (2) $m(x) = (x-2)(x-1)^2$
 (3) $m(x) = (x-2)^2(x-1)$ (4) $m(x) = (x-2)^2(x-1)^2$
 (5) $m(x) = (x-2)^3(x-1)$ (6) $m(x) = (x-2)^3(x-1)^2$
 (7) $m(x) = (x-2)^4(x-1)$ (8) $m(x) = (x-2)^4(x-1)^2$
 (9) $m(x) = (x-2)^5(x-1)$ (10) $m(x) = (x-2)^5(x-1)^2$

Denote por $J(\lambda; k) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ 0 & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$

No caso (1)

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

No caso (2)

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & J(1;2) & \\ & & & & & & \end{bmatrix}$$

No caso (3)

$$5 = 2 + 2 + 1$$

$$5 = 2 + 1 + 1 + 1$$

$$\begin{bmatrix} J(2;2) & & & & & & \\ & J(2;2) & & & & & \\ & & J(2;1) & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} J(2;2) & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

caso (4)

$$\begin{bmatrix} \overline{J(3;2)} \\ \overline{J(2;2)} \\ \overline{J(1;2)} \end{bmatrix}$$

or

$$\begin{bmatrix} \overline{J(3;2)} \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ \overline{J(1;2)} \end{bmatrix}$$

(5)

$5 = 3 + 2$
 $5 = 3 + 1 + 1$

$$\begin{bmatrix} \overline{J(3;3)} \\ J(2;2) \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

or

$$\begin{bmatrix} \overline{J(2;3)} \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(6)

$$\begin{bmatrix} \overline{J(2;3)} \\ J(2;2) \\ J(1;2) \end{bmatrix}$$

or

$$\begin{bmatrix} \overline{J(2;3)} \\ 2 \\ 2 \\ J(1;2) \end{bmatrix}$$

(7) $5 = 4 + 1$

$$\begin{bmatrix} \overline{J(2;4)} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(8)

$$\begin{bmatrix} \overline{J(2;4)} \\ 2 \\ J(1;2) \end{bmatrix}$$

(9)

$$\begin{bmatrix} \overline{J(2;5)} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(10)

$$\begin{bmatrix} \overline{J(2;5)} \\ J(1;2) \end{bmatrix}$$

2. (1,5) Verifique se as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são ou não semelhantes. **JUSTIFIQUE!** (Observação: $p_A(X) = (X-1)^4 = p_B(X)$.)

$$(A - I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{Logo } m_A(x) = (x-1)^2$$

$$(B - I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Assim com certeza $m_A(x) \neq m_B(x)$.

Logo A e B NÃO sÃo semelhantes!

3. (3,0) Decida se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique, prove as afirmações verdadeiras e dê um contra-exemplo quando a afirmação for falsa.

- (a) Se A é uma matriz **complexa** simétrica então $AA^* = A^*A$.
 (b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ são ambas **normais** e têm o mesmo polinômio característico, então existe uma matriz unitária U tal que $U^*AU = B$.
 (c) Se duas matrizes nilpotentes $A, B \in M_4(\mathbb{K})$ têm o mesmo posto então elas são semelhantes. Mesma pergunta se forem matrizes 3×3 .
 (d) Se $A \in M_n(\mathbb{C})$ é uma matriz normal tal que $A^5 + A^4 + A^3 = 0$ então $A^4 = A$.

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \quad A^t = A \quad A^* = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}$$

$$AA^* = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^*A = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}$$

Logo $AA^* \neq A^*A$ e então A não é normal. Afirmação FALSA.

(b) VERDADEIRA

Suponha que $p_A(x) = p_B(x) = (x - \lambda_1)^{n_1} \dots (x - \lambda_k)^{n_k}$

com $n_1 + \dots + n_k = n$.

Como A e B são normais, existem matrizes unitárias U_1 e U_2 tais que

$$U_1^* A U_1 = D = U_2^* B U_2 \quad \text{onde}$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo } (U_2 U_1^*) A U_1 U_2^* = B$$

$$U = U_1 U_2^* \quad \text{é unitária} \quad (UU^* = U_1 U_2^* U_2 U_1^* = I)$$

(C) falso

Se A é 4×4

(1) $4 = 3 + 1$

(2) $4 = 2 + 2$

Tanto no caso (1) como no caso (2)
o posto de A é igual a 2

no entanto as formas de Jordan
nos casos (1) e (2) são diferentes!

No caso (1) $m_A(x) = x^3$ e no (2) $m_A(x) = x^2$,

Para matrizes 3×3 o resultado é verdadeiro

$3 = 3 \rightarrow$ nesse caso posto de $A = 2$

$3 = 2 + 1 \rightarrow$ nesse caso posto de $A = 1$

$3 = 1 + 1 + 1 \rightarrow$ posto $A = 0 \Rightarrow A = 0$.

Se 2 matrizes nilpotentes 3×3 têm o mesmo
posto, então elas têm a mesma forma de Jordan
e são então semelhantes.

(d) Se $A^5 + A^4 + A^3 = 0$ então
 $m_A(x)$ é um divisor de $x^5 + x^4 + x^3 = x^3(x^2 + x + 1)$.
Logo $m_A(x)$ é um divisor de $x(x^2 + x + 1)$ pois
 A é normal.

Logo $A(A^2 + A + I) = 0$

$\Rightarrow A(A^2 + A + I)(A - I) = 0$

$\Rightarrow A(A^3 - I) = 0 \Rightarrow A^4 = A$

Assim a afirmação é VERDADEIRA

4. (2,0) Considere $P(\mathbb{R})$ com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Determine o polinômio de grau ≤ 2 que melhor aproxima o polinômio $h(x) = x^3$.

Resolução: Para encontrar a projeção ortogonal de x^3 no subespaço W de $P(\mathbb{R})$, $W = [1, x, x^2]$

$$\text{proj}_W x^3 = \langle x^3, v_1 \rangle v_1 + \langle x^3, v_2 \rangle v_2 + \langle x^3, v_3 \rangle v_3$$

onde $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortonormal de W .

Para isso, precisamos ortogonalizar a base $\{1, x, x^2\}$ de W .

$$w_1 = 1$$

$$w_2 = x - \frac{\langle x, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1$$

$$\langle x, 1 \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 dx = 1$$

$$w_2 = x - \frac{1}{2}$$

$$w_3 = x^2 - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} \cdot 1 - \frac{\langle x^2, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2$$

$$\langle x^2, w_2 \rangle = \int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \left. \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} \right|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}$$

$$\begin{aligned} \langle w_2, w_2 \rangle &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) dx \\ &= \left. \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}x \right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Logo $w_3 = x^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$= x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$v_1 = w_1$$

$$v_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}(2x - 1)$$

$$v_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|}$$

$$\|w_3\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx$$

$$\|w_3\|^2 = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + x^2 + \frac{2}{6}x^2 - \frac{2}{6}x + \frac{1}{36}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{36}x \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$$

$$\text{Logo } v_3 = 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)$$

$$\text{Logo } \text{proj}_W x^3 = \left(\int_0^1 x^3 dx\right) w_1 + \left[\int_0^1 x^3 (2\sqrt{3}(x - \frac{1}{2})) dx\right] w_2$$

$$+ \int_0^1 (x^3 \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)) dx w_3$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \quad \int_0^1 \left(x^4 - \frac{1}{3}x^3\right) dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{24} = \frac{8-5}{40} = \frac{3}{40}$$

$$\int_0^1 x^3 (6x^2 - 6x + 1) dx = \left[\frac{6x^6}{6} - \frac{6x^5}{5} + \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1 - \frac{6}{5} + \frac{1}{4} = \frac{20-24+5}{20} = \frac{1}{20}$$

$$\text{Logo } \text{proj}_W x^3 = \frac{1}{4} + \frac{3}{40} \cdot 2 \left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{20} \cdot \sqrt{5} (6x^2 - 6x + 1)$$

$$= \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{5}x + \frac{1}{20}$$

5. (2,0) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{2} & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

(a) Ache uma matriz ortogonal $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^t A P$ é diagonal. É A uma matriz positiva?

(b) Encontre uma matriz $C \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $C^3 = A$.

$$(a) \quad p_A(x) = -\det \begin{bmatrix} 2-x & 3\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{2} & 5-x & 0 \\ 0 & 0 & 8-x \end{bmatrix}$$

$$= (x-8)(x^2 - 7x + 10 - 18) = (x-8)^2(x+1)$$

$V(-1)$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{2} & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$3x + 3\sqrt{2}y = 0$$

$$3\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y = 0$$

$$9z = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x}$$

$$V(-1) = \left[\left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right]$$

$$V(8) = [e_3, (1, \sqrt{2}, 0)]$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 3\sqrt{2} & 0 \\ 3\sqrt{2} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-6x + 3\sqrt{2}y = 0$$

$$3\sqrt{2}x - 3y = 0$$

$$\sqrt{2}x - y = 0 \Rightarrow y = \sqrt{2}x$$

$$\left\| \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \right\| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\left\| (1, \sqrt{2}, 0) \right\| = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

Se $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é tal que

$[T]_{\text{can}} = A$, então

$B = \left\{ \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)}_{\text{associado a } -1}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0\right)}_{\text{associado a } 8}, (0, 0, 1) \right\}$ é uma base ortonormal

é tal que $[T]_B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

Tome então $P = [I]_{B, can} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \\ -1/\sqrt{3} & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e

uma matriz ortogonal e

$$P^t A P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

(b) $A = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} P^t$

Seja $C = P \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^t$,

Então $C^3 = \underline{\underline{A}}$.

Obs A NÃO é positiva pois tem um autovalor negativo.