

MAT0222 - Álgebra Linear II

3ª Prova - 20/06/2013

Nome : _____
 Nº USP : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Atenção:

1. Leia os enunciados com atenção.
2. Justifique todas as suas afirmações.
3. BOA PROVA!

1. (2,0) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja

$$W = \{(x, y, z) | x + y - 2z = 0\}.$$

Seja $E \in L(\mathbb{R}^3)$ a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em W . Determine a matriz de E em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) \in W \Rightarrow 2z = x + y \Rightarrow z = \frac{1}{2}(x + y)$$

$$\text{Logo } (x, y, z) = (x, y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y) = x(1, 0, \frac{1}{2}) + y(0, 1, \frac{1}{2})$$

Assim $\{(1, 0, \frac{1}{2}), (0, 1, \frac{1}{2})\}$ gera W e como é L^1 ,
é uma base de W .

Vamos encontrar uma base ortogonal $\{w_1, w_2\}$ de W .

$$v_1 = (1, 0, \frac{1}{2}) \quad v_2 = (0, 1, \frac{1}{2}) - \frac{\langle (0, 1, \frac{1}{2}), (1, 0, \frac{1}{2}) \rangle}{\|(1, 0, \frac{1}{2})\|^2} (1, 0, \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} v_2 &= (0, 1, \frac{1}{2}) - \frac{1/4}{5/4} (1, 0, \frac{1}{2}) \\ &= (0, 1, \frac{1}{2}) - (1/5, 0, 1/10) = (-1/5, 1, 2/5) \end{aligned}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{2}{\sqrt{5}} (1, 0, \frac{1}{2}) = (2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})$$

$$w_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} (-1/5, 1, 2/5)$$

Para encontrar $[E]_{can}$

$$E(e_1) = \text{proj}_w e_1 = \langle e_1, w_1 \rangle w_1 + \langle e_1, w_2 \rangle w_2$$

$$E(e_2) = \text{proj}_w e_2 = \langle e_2, w_1 \rangle w_1 + \langle e_2, w_2 \rangle w_2$$

$$E(e_3) = \text{proj}_w e_3 = \langle e_3, w_1 \rangle w_1 + \langle e_3, w_2 \rangle w_2$$

$$w_1 = (2/\sqrt{5}, 0, 1/\sqrt{5})$$

$$w_2 = (-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}})$$

$$\begin{aligned} E(e_1) &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \right) \\ &= \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{2}{5} \right) + \left(+\frac{1}{30}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{30} \right) = \left(\frac{25}{30}, -\frac{1}{6}, \frac{10}{30} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(e_2) &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(e_3) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \left(-\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, \frac{2\sqrt{5}}{5\sqrt{6}} \right) \\ &= \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{1}{5} \right) + \left(-\frac{2}{30}, \frac{2}{6}, \frac{4}{30} \right) \\ &= \left(\frac{10}{30}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Loop } [E]_{can} = \begin{matrix} & \begin{matrix} E(e_1) & E(e_2) & E(e_3) \end{matrix} \\ \begin{matrix} E(e_1) \\ E(e_2) \\ E(e_3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5/6 & -1/6 & 1/3 \\ -1/6 & 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

2. (3,0) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- (a) Encontre uma matriz **ortogonal** $P \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $P^t A P$ é diagonal.
 (b) Determine uma matriz **positiva** $C \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = A$. Justifique, explique por quê a matriz que você obteve é positiva.

$$\begin{aligned} p_A(x) &= (x-5)[(x-5)^2 - 4] \\ &= (x-5)(x^2 - 6x + 5) \\ &= (x-5)^2(x-1) \end{aligned}$$

Como $A^t = A$, seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\text{can}} = A$. Como $A^t = A$ temos que $T^* = T$. Achar uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ é diagonal.

$$\begin{aligned} V(1) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Tv = v\} \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} 2x + 2y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \\ 4z &= 0 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$\text{Logo } z = 0 \text{ e } x = -y$$

$$V(1) = \{(1, -1, 0)\}$$

$$\begin{aligned} V(5) &= \{v \in \mathbb{R}^3 \mid Tv = 5v\} \\ \begin{bmatrix} 3-5 & 2 & 0 \\ 2 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2x + 2y = 0 \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = x(1, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$V(5) = \{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

Uma base ortonormal B de V tq $[T]_B$ é diagonal é obtida tomando a união de uma base ortonormal de $V(1)$ e uma de $V(5)$

$$B = \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)}_{\text{base ortonormal de } V(1)}, \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), (0, 0, 1)}_{\text{base ortonormal de } V(5)} \right\}$$

$$T(v_1) = v_1$$

$$T(v_2) = 5v_2$$

$$T(v_3) = 5v_3$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow{I} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{T} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{I} \mathbb{R}^3$$

$$B \xrightarrow{p} \text{can} \xrightarrow{A} \text{can} \xrightarrow{p^t} B$$

$$P = [I]_{B, \text{can}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$p^t = [I]_{\text{can}, B}$$

$$P^t A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) A é uma matriz positiva pois $A^* = A^t = A$ e os autovalores de A são números reais positivos.

$$\text{Seja } C = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} P^t \quad \boxed{C^* = C}$$

Então C é positiva pois $C^* = C^t = C$ e os autovalores de C são números reais positivos.

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & \sqrt{5}/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & \sqrt{5}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3. (3,5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ com produto interno $\langle, \rangle$ e T é um operador linear em V . Prove as afirmações a seguir.

- (a) Se W é um subespaço de V invariante sob T então $W^\perp$ é invariante sob T^* .
- (b) Se T é normal e $v \in V$ é tal que $T^2 v = 0$ então $Tv = 0$.
- (c) Se T é normal e $n > 0$ é um inteiro tal que $T^{n+1} = T^n$ então $T^2 = T$.
- (d) Se T leva uma base ortonormal de V em uma base ortonormal de V então T é unitário.

(a) Seja $u \in W^\perp$. Provar que $T^*u \in W^\perp$.
Provar que $\langle w, T^*u \rangle = 0 \quad \forall w \in W$.

$$\langle w, T^*u \rangle = \langle \underbrace{Tw}_{\in W}, u \rangle = 0.$$

W pois W é inv. sob T

(b) Se $Tv \neq 0 \Rightarrow 0 \neq \langle Tv, Tv \rangle$

Como $Tv \in \text{Ker } T$ (pois $T^2v = 0$)

e $\text{Ker } T = \text{Ker } T^*$ (pois T é NORMAL) (*)

$$\Rightarrow T^*T(v) = 0$$

Logo $\langle T^*(T(v)), v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = 0$ absurdo!

(*) T normal $\Rightarrow$

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle T^*v, T^*v \rangle \quad \forall v$$

$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle v, T^*Tv \rangle = \langle v, TT^*v \rangle$$

$$= \langle T^*v, T^*v \rangle$$

$$\therefore \|Tv\| = \|T^*v\| \quad \forall v \Rightarrow$$

$$Tv = 0 \Leftrightarrow T^*v = 0$$

(c) Se $T^{n+1} = T^n$ então o polinômio minimal de T é um divisor do polinômio $X^{n+1} - X^n$.
 $X^{n+1} - X^n = X^n(X-1)$. Como T é normal, o polinômio minimal de T é produto de fatores lineares distintos. Assim o minimal de T é um divisor do polinômio $X(X-1)$. Logo $T^2 = T$.

(d) Sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de V
 y $C = \{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ también es ortonormal.

Sabemos que

$$\langle v_i, v_j \rangle = \langle Tv_i, Tv_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Sea $u, v \in V$ $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ $v = \sum_{j=1}^n b_j v_j$

Como T es lineal

$$\langle Tu, Tv \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i Tv_i, \sum_{j=1}^n b_j Tv_j \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{b_j} \langle Tv_i, Tv_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i \overline{b_j} \langle v_i, v_j \rangle = \langle u, v \rangle$$

Como $\forall u, v \in V$

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle \Rightarrow$$

$$\langle u, T^*Tv \rangle = \langle u, v \rangle \quad \forall u, v \in V$$

$$\Rightarrow \langle u, T^*Tv - v \rangle = 0 \quad \forall u, v$$

$$\Rightarrow T^*Tv - v = 0 \quad \forall v \in V$$

$$\text{Logo } T^*T = I$$

4. (2,5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $\langle, \rangle$

- (a) Prove que para $u, v \in V$ temos que $\|u\| = \|v\|$ se e somente se $\langle u+v, u-v \rangle = 0$.
- (b) Seja $T \in L(V)$ tal que um operador linear tal que se $u, v \in V$ e $\langle u, v \rangle = 0$ então $\langle Tu, Tv \rangle = 0$ (isto é, T leva vetores ortogonais em vetores ortogonais). Prove que se $\|u\| = \|v\|$ então $\|Tu\| = \|Tv\|$.
- (c) Se $0 \neq T \in L(V)$ é como no item (b), mostre que existe $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ e um operador ortogonal U tal que $T = \lambda U$. (Sugestão: Use a versão para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ do exercício 3(d).)

$$(a) \quad \langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$$

$$\text{Logo } \langle u+v, u-v \rangle = 0 \iff \|u\|^2 = \|v\|^2.$$

(b) Sejam $u, v \in V$ com $\|u\| = \|v\|$

$$\Rightarrow \langle u+v, u-v \rangle = 0 \Rightarrow \langle Tu+Tv, Tu-Tv \rangle = 0$$

(a)

$$\Rightarrow \|Tu\| = \|Tv\|$$

(a)

(c) Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base ortonormal

de V . Como $\|v_i\| = \|v_j\| \quad \forall i, j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \|Tv_i\| = \|Tv_j\| = \lambda \quad \forall i, j$$

$\lambda \neq 0$ pois $T \neq 0$

Logo $\left\{ \frac{1}{\lambda} Tv_1, \dots, \frac{1}{\lambda} Tv_n \right\}$ é base ortonormal

de V

$$\text{Seja } U: V \rightarrow V \quad U(e_i) = \frac{1}{\lambda} Tv_i$$

Como U leva base ortonormal em base ortonormal,
 U é ortogonal e é claro
 que $T = \lambda U$.