

MAT0222 - Álgebra Linear II
1ª Prova - 12/04/2016

Nome : _____
Nº USP : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Atenção:

1. Leia os enunciados com atenção.
2. Justifique todas as suas afirmações.
3. BOA PROVA!

1. (3,0)

- (a) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K e seja $T \in L(V)$ um operador linear de posto 1 e tal que $T^2 \neq 0$. Prove que $V = \text{Ker} T \oplus \text{Im} T$.
- (b) Seja $T \in L(\mathbb{C}^3)$ o operador linear tal que

$$[T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & -1 & i \\ 1+i & -1+i & 1+i \end{bmatrix}.$$

Encontre o único $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $T^2 = \alpha T$ e determine uma base B de $\mathbb{C}^3$ tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (a) $\text{posto}(T) = \dim \text{Im} T = 1 \Rightarrow \dim \text{Ker} T = \dim V - 1$. $[T(v_0)]$
 Se $\dim V = n$, seja $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ uma base de $\text{Ker} T$.
 Como $T^2 \neq 0$, $\exists v_0 \in V$ tal que $T^2(v_0) \neq 0$.
AFIRMAÇÃO: $\{v_1, \dots, v_{n-1}, T(v_0)\}$ é LI. Se não
 fosse LI, como $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é LI, existiriam escalares
 $a_1, \dots, a_{n-1}$ tais que $T(v_0) = a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}$.
 Mas daí, $T(T(v_0)) = 0$, contrariando a escolha de v_0 .
 Assim $\{v_1, \dots, v_{n-1}, T(v_0)\}$ é uma base de V .
 base de $\text{Ker} T$ base de $\text{Im} T$
 Logo $V = \text{Ker} T \oplus \text{Im} T$.

$$(b) [T^2]_{can} = [T]_{can} [T]_{can}$$

$$[T^2]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & -1 & i \\ 1+i & -1+i & 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & -1 & i \\ 1+i & -1+i & 1+i \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+i & -1+i & 1+i \\ i-1 & -1-i & i-1 \\ (1+i)^2 & -2 & (1+i)^2 \end{bmatrix} = (1+i) \begin{bmatrix} 1 & i & 1 \\ i & -1 & i \\ (1+i) & -1+i & (1+i) \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo } \alpha = (1+i).$$

$$\text{Uma base de } \text{Im } T = \{T e_i\} = \{1, i, 1+i\}$$

Base de Ker T

$$(x, y, z) \in \text{Ker } T \Leftrightarrow x + iy + z = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -x - iy$$

$$(x, y, -x - iy) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -i)$$

$$\text{Base de Ker } T = \{(1, 0, -1), (0, 1, -i)\}$$

$$B = \{(1, i, 1+i), (1, 0, -1), (0, 1, -i)\}$$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

NBS: Se você resolveu o exercício 3(b), você poderia usar o resultado no item (a).

- Se posto $T = 1$, então $T^2 \neq 0$, então é claro que $\text{Im } T = \text{Im } T^2$. Então por 3(b), $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

2. (2,5) Considere o $\mathbb{R}$ -espaço vetorial $P_3(\mathbb{R})$ e os funcionais lineares $f_1, f_2, f_3 \in (P_3(\mathbb{R}))^*$ definidos por $f_1(p) = p(1)$, $f_2(p) = p'(1)$ e $f_3(p) = p''(1)$. Mostre que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é linearmente independente. Ache o subespaço W de $P_3(\mathbb{R})$ tal que $W^\circ = [f_1, f_2, f_3]$.

Mostrar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ é L.I.

Suponhamos $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3 = 0 \Rightarrow$$

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3)(p) = 0 \quad \forall p \in P_3(\mathbb{R})$$

Se $p=1$

$$a_1 f_1(1) + a_2 f_2(1) + a_3 f_3(1) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_1 = 0}$$

Se $p=x$

$$a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = 0$$

$$a_2 + a_3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{a_2 = 0}$$

$p=x^2$

$$a_3 f_3(x^2) = 0 \Rightarrow 2a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = 0}$$

Logo $\{f_1, f_2, f_3\}$ é L.I.

Se $W^\circ = [f_1, f_2, f_3]$, então $\dim W^\circ = 3 \Rightarrow \dim W = 4 - 3 = 1$.

Basta então achar $p(x) \neq 0$, $p(x) \in W$.

Observe que $(x-1)^3 \in W$. Assim $W = [(x-1)^3]$.

3. (4,5) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n sobre o corpo K . Prove as afirmações abaixo.

(a) O conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_n\} \subset V^*$ é uma base de V^* se, e somente se, $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i = \{0\}$.

(b) Seja $T \in L(V)$. Então $\text{Im } T = \text{Im } T^2$ se, e somente se, $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$.

(c) Seja $T \in L(V)$. Prove que $\text{Im } T^t = (\text{Ker } T)^\circ$.

(a) ($\Rightarrow$) - Suponha que $\{f_1, \dots, f_n\}$ é base de V^* .

Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ a base de V da qual ela é dual. Se $v \in V$, então $v = \sum_{i=1}^n f_i(v) v_i$ (4)

Suponha então que $v \in \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i \Rightarrow f_i(v) = 0$

$\forall i=1, \dots, n \Rightarrow v = 0$. (4)

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i = \{0\}$.

Se $\{f_1, \dots, f_n\}$ não é base de V^* , então

$\{f_1, \dots, f_n\}$ é L.D. Remaneando, se necessário, suponha que $\{f_1, \dots, f_k\}$ é um subconjunto L.I. maximal de $\{f_1, \dots, f_n\}$, em que $k < n$. Então cada $f_j, j=k+1, \dots, n$ é combinação linear de $\{f_1, \dots, f_k\}$.

Assim $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker } f_i = \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } f_i = \{0\}$

Mas existem funcionais $\{g_{k+1}, \dots, g_n\}$ de modo que $\{f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_n\}$ é uma base de V^* . Seja $\{v_1, \dots, v_n\}$ a base de V da qual ela é dual. Então os vetores $v_{k+1}, \dots, v_n \in \bigcap_{i=1}^k \text{Ker } f_i$ o que é uma contradição com o fato de

$\bigcap_{i=1}^k \text{Ker } f_i = \{0\}$.

(b) Suponha que $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$. Mostrar que $\text{Im } T = \text{Im } T^2$. É claro que $\text{Im } T^2 \subset \text{Im } T$.
Vamos então provar que $\dim \text{Im } T^2 = \dim \text{Im } T$.

Seja $\{v_1, \dots, v_k\}$ uma base de $\text{Im } T$.

Vamos provar que $\{Tv_1, \dots, Tv_k\}$ é LI.

Suponha que $a_1 Tv_1 + \dots + a_k Tv_k = 0, a_i \in K$

$$\Rightarrow T(a_1 v_1 + \dots + a_k v_k) = 0 \Rightarrow$$

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \in \text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$$

$$\Rightarrow a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_i = 0, i=1, \dots, k.$$

Logo $\{Tv_1, \dots, Tv_k\}$ é LI.

($\Rightarrow$) Se $\text{Im } T = \text{Im } T^2$, provar que $V = \text{Ker } T \oplus \text{Im } T$

$$- \text{Ker } T \cap \text{Im } T = \{0\}$$

Seja $v \in \text{Ker } T \cap \text{Im } T$

Seja $\{T^2 v_1, \dots, T^2 v_k\}$ uma base de $\text{Im } T = \text{Im } T^2$.

Então $\{Tv_1, \dots, Tv_k\}$ é LI, e também é uma base de $\text{Im } T$.

$$\text{Se } v \in \text{Ker } T \cap \text{Im } T \Rightarrow v = a_1 Tv_1 + \dots + a_k Tv_k, \text{ com } a_i \in K$$

$$\Rightarrow T(v) = 0 \Rightarrow a_1 T^2 v_1 + \dots + a_k T^2 v_k = 0$$

$$\Rightarrow a_i = 0 \quad \forall i=1, \dots, k \Rightarrow v=0.$$

$$\underline{V = \text{Ker } T + \text{Im } T}$$

$$v \in V \Rightarrow Tv \in \text{Im } T = \text{Im } T^2$$

$$\Rightarrow Tv = T^2 u, u \in V.$$

$$v = v - Tu + Tu. \text{ Mostrar que}$$

$$v - Tu \in \text{Ker } T.$$

$$\text{Isso é claro, pois } T(v - Tu) = Tv - T^2 u = 0.$$

(c) $T \in L(V)$

Sabemos que $\text{posto } T = \text{posto } T^t$.

Seja $g \in \text{Im } T^t$. Então existe $f \in V^*$

tal que $g = T^t f = f \circ T$.

Se $v \in \text{Ker } T$, então $g(v) = (f \circ T)(v)$
 $= f(T(v)) = 0$. Logo $g \in (\text{Ker } T)^\circ$.

Assim $\text{Im } T^t \subset (\text{Ker } T)^\circ$.

$$\dim \text{Im } T^t = \dim \text{Im } T = \dim V - \dim \text{Ker } T \\ = \dim (\text{Ker } T)^\circ.$$

$$\text{Logo } \text{Im } T^t = (\text{Ker } T)^\circ.$$